

積分(自由課題)

Copyright ©2006 by Shigeto R. Nishitani

student/パッケージのいろいろ

ちょっとぐらい難しい積分も, Mapleは単純な命令だけで実行してくれる。しかし, 時には, 途中の計算法である部分積分, 置換積分, 部分分数展開が必要になる。このような計算はstudentパッケージに用意されている。

> with(student):

部分積分(integration by parts)

> intparts(Int(x*exp(x),x),x);

$$x e^x - \int e^x dx \quad (1.1.1)$$

置換(change of variables)による積分

> Int((cos(x)+1)^3*sin(x), x);

changevar(cos(x)+1=u, Int((cos(x)+1)^3*sin(x), x=a..b), u);

changevar(cos(x)+1=u, int((cos(x)+1)^3*sin(x), x), u);

$$\int (\cos(x)+1)^3 \sin(x) dx$$

$$\int_{\cos(a)+1}^{\cos(b)+1} (-u^3) du$$

$$-\frac{1}{4} u^4 \quad (1.1.2)$$

部分分数(partial fraction)展開による積分

> pfl:=convert(1/(1+x^3),parfrac,x);int(pfl,x);

$$pfl := \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3} \frac{-x+2}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{3}\right) \quad (1.1.3)$$

広義積分

特異点をもつ場合にも適切に積分結果を求めてくれる。

> int(1/sqrt(x*(2-x)),x=0..2);

$$\pi \quad (1.2.1)$$

存在しない場合,

> int(1/x^2,x=-1..1);

$$\infty \quad (1.2.2)$$

無限区間における定積分も同様。

> int(1/(x^2+4),x=-infinity..infinity);

$$\frac{1}{2} \pi \quad (1.2.3)$$

存在しない場合,

> int(sin(x),x=0..infinity);

undefined

(1.2.4)

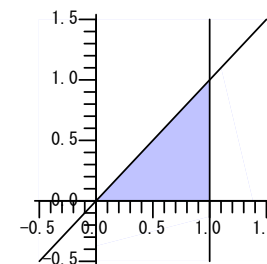
例題(2重積分)

次の2重積分を求めよ。

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad D: 0 \leq y \leq x \leq 1$$

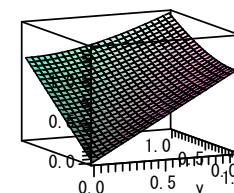
> with(plots):

inequal({x-y>=0,x>=0,x<=1,y>=0},x=-0.5..1.5,y=-0.5..1.5,optionsexcluded=(color=white));



> f:=unapply(sqrt(x^2+y^2),(x,y));

plot3d(f(x,y),x=0..1,y=0..1);



> int(int(f(x,y),y=0..x),x=0..1);

$$\frac{1}{6} \sqrt{2} + \frac{1}{6} \ln(1+\sqrt{2}) \quad (2.1)$$

演習

次の2重積分を求めよ。(i) $\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy$, (ii)

$$\left[\iint_D e^{xy} \sin(x) \, dx \, dy, D = \{0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \pi\} \right]$$