

数値計算試験問題

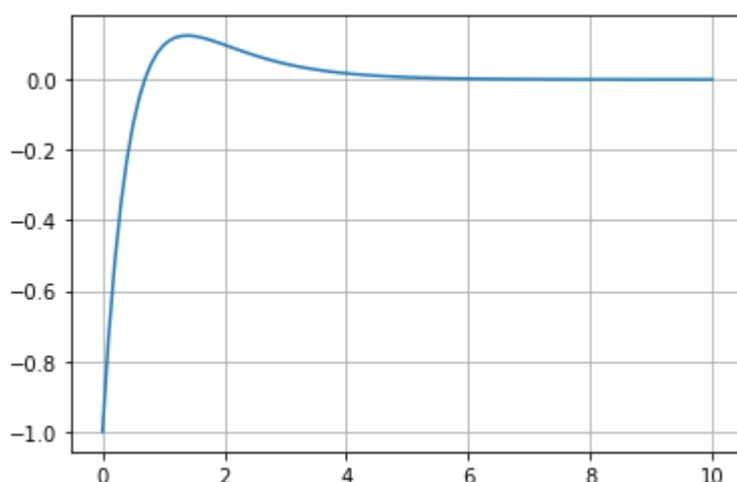
2025/07/09 実施

cc by Shigeto R. Nishitani 2025

2分法, Newton-Raphson法の収束性：25点

以下の関数 $f(x)$ の解を区間 $x = 0..1$ において 2分法とNewton-Raphson法で求めよ。また、それぞれの収束挙動をlogで同時プロットし比較せよ。

$$f(x) = e^{-x} - 2e^{-2x}$$



グラム・シュミットの直交化法とQR分解：25点

グラム・シュミットの直交化法

与えられたベクトルから正規直交基底を作るアルゴリズムとして グラム・シュミットの直交化法がある。

その手順は、ベクトル $v_1, \dots, v_n$ が与えられたとすると

1. $u_1 = v_1$
2. $u_2 = v_2 - \frac{u_1^T v_2}{u_1^T u_1} u_1$
3. $u_n = v_n - \frac{u_1^T v_n}{u_1^T u_1} u_1 - \frac{u_2^T v_n}{u_2^T u_2} u_2 - \dots - \frac{u_{n-1}^T v_n}{u_{n-1}^T u_{n-1}} u_{n-1} = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^T v_n}{u_i^T u_i} u_i$

で互いに直交した基底を求め、これらを

$$e_i = \frac{u_i}{(u_i^T u_i)^{1/2}}$$

によって正規化すれば, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ が正規直交基底となる.

次の $\mathbb{R}^4$ ベクトルから正規直交基底を作れ.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QR分解

次の行列AのQR分解を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidtで求めた正規直交基底と比べよ.

常微分方程式：25点

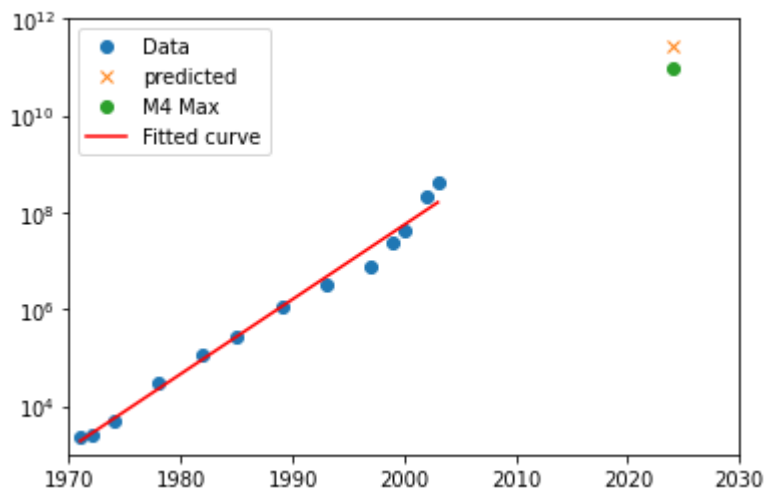
フォーミュラEと呼ばれるEV車(電気自動車)のレースでは, 停止時から毎時100キロメートルまでの加速時間は1.86秒となる. これは, 普通のF1よりも3割速いらしい. 日経(2025/6/4)

1. 空気抵抗などの規格化した抵抗が速度の0.5として, この加速性能を達成するためには何G程度の推力が必要となるか小数点以下二桁程度で求めよ.
2. F1で使われる車両とフォーミュラEで使われる車両の重量はほぼ同じである. 抵抗も同じとして, クラッチロスなどが無いと仮定して, F1車の推力を求めよ.
3. 結果を検討せよ.

注: 例えば「2Gの推力」とは機体(普通はロケット)の自重の2倍の力で推進していることを表し, 加速度は重力加速度(9.8m/sec²)の2倍になるとします.

ムーアの法則：25点

次の図の青点は13種類のマイクロプロセッサの発売年と, それぞれに含まれるトランジスタ数 N を対数スケールで表示している.



それぞれのデータは次の配列で与えられる.

```
In [14]: import numpy as np

list_year=[1971,1972,1974,1978,1982,1985,1989,1993,1997,1999,2000,2002,2003]
list_cpu_num=[2250,2500,5000,29000,120000,275000,1180000,3100000,7500000,
              24000000,42000000,220000000,410000000]
```

このデータに対して、以下のモデルを用いて最小二乗法による直線当てはめを求めよ.

$$\log_{10} N = \theta_1 + \theta_2(t - 1970)$$

ここで、 t は年、 N はトランジスタ数である. なお、 θ_1 はモデルが予測する1970年におけるトランジスタ数の対数、 10^{θ_2} はモデルが予測する毎年のトランジスタ数の増加率である.

1. そのモデルを用いて2024年のマイクロプロセッサ中のトランジスタ数を予測せよ.
2. Apple M4 Max(2024)のトランジスタ数(約100億、 100×10^9)と比較せよ.

この予測は「集積回路のトランジスタ数は1年半から2年でおおよそ2倍になる」というムーアの法則を満たしている.

逆行列の求め方のヒント

最小二乗法のデザイン行列(AA)の逆行列の求め方にはいろいろあるがどれもこの問題では一致する. どれか好きなのを使ってください.

正規方程式(Normal Equations)による解

テキストで紹介している方法.

$$AA^{-1} = (AA^T \cdot AA)^{-1}$$

ただし、 $Ax = b$ の解 x は,

$$x = AA^{-1}(AA^T b)$$

QR分解による解

先ほどのQR分解を用いると以下の通り求められる.

$$AA = Q \cdot R$$

$$AA^{-1} = R^{-1}Q^T$$

$$x = AA^{-1} \cdot b$$

pseudo inverseによる解

linalgには優決定方程式(縦長行列)の (Moore-Penrose) 擬似逆行列(pseudo-inverse of a matrix)を計算する関数としてpinvが用意されている。内部ではSVD(singular value decomposition)を使っている。

```
pseudo_inv = np.linalg.pinv(AA)
```

で求めたpseudo_invを**b**に左から掛けると求められる。ん？そうか。

Apple M4 Max(最新のTSMC 3nmで作られたプロセッサ)においても、外挿値の0.4倍程度であり、2025年時点でもトランジスタ数は予測通りに増加している。

In []: