

数値計算試験問題

2023/07/12 実施

cc by Shigeto R. Nishitani 2023

1 簡単な行列計算:25点

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -4 & -5 & -7 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

また、固有ベクトルで構成される対角化行列 P を用いて、ドット演算 により $P^{-1} \cdot A \cdot P$ が対角化されることを確かめよ。

2 ニュートンの差分商補間:25点

三次関数 x^3 の $x = 0.75$ における値 $F(0.75)$ をニュートンの差分商補間を用いて求める。 ニュートンの内挿公式は、

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2] + \cdots + \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) f_n[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

である。ここで $f_i[\]$ は次のような関数を意味していて、

$$\begin{aligned} f_1[x_0, x_1] &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ f_2[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f_1[x_1, x_2] - f_1[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \\ f_n[x_0, x_1, \cdots, x_n] &= \frac{f_{n-1}[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f_{n-1}[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる。 $x_k = -1, 0, 1, 2$ をそれぞれ選ぶと、差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる。

k	x_k	$y_k = F_0(x_k)$	$f_1[x_k, x_{k+1}]$	$f_2[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f_3[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	-1.0	-1.0	1.0		
1	0.0	0.0		[XXX]	
2	1.0	1.0	1.0	3.0	1.0
3	2.0	8.0	7.0		

それぞれの項は、例えば、

$$f_1[x_0, x_1] = \frac{0.0 - (-1.0)}{0.0 - (-1.0)} = 1.0$$

で求められる。ニュートンの差分商の一次多項式の値は $x=0.75$ で

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(-1.0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] & (1) \\ &= -1.0 + (0.75 - (-1.0)) \times (1.0) & (2) \\ &= 0.75 & (3) \end{aligned}$$

となる。

(1) 差分商補間の表中の開いている箇所 [XXX] を埋めよ。

(2) ニュートンの二次多項式

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2]$$

の値を求めよ。

(3) ニュートンの三次多項式の値を求めよ。

(児玉鹿三著「理工系基礎数学解析-I」(槇書店、1967), p.294)

3 Gauss-Seidelの収束性:25点

初期値を $[0, 0, 0]^t$ として、 $A(tt)x = b$ にガウス・ザイデルによる連立一次方程式の反復解法プログラムを適用する。ただし、

$$A(tt) = \begin{pmatrix} 1 & tt & tt \\ tt & 1 & tt \\ tt & tt & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

である。 $tt = 0.2, 0.5, 0.7$ に対して有効数字6桁の解を得るための反復回数を求めよ。

(E.クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.89, 問題2.3-9)

4 ページランク:25点

次のようなリンクが張られたページ群のページランクを求めよ。

