

情報工学のための数学演習 1(線形代数) 試験問題

次の行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

および、行列 A の各列で作るベクトル a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を考える.

[1] (p.52 解空間: 例題 8 改変)(25 点)

ベクトル x

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

および $\mathbb{R}^5$ のゼロベクトル 0 を用いて

$$Ax = 0$$

で表される同次連立一次方程式の解全体のつくる $\mathbb{R}^5$ の部分空間の次元と 1 組の基底を求めよ.

[2] (p.47 基底と成分: 例題 4 改変)(25 点)

- (1) ベクトル a_1, a_2, a_3 は基底をなすことを示せ.
- (2) ベクトル a_4, a_5 の基底 $\{a_1, a_2, a_3\}$ に関する成分を求めよ.

[3] (p.60 グラム・シュミットの直交化法: 例題 14 改変)(25 点)

グラム・シュミットの直交化法により、ベクトル a_1, a_2, a_3 から $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を作れ.

[4] (p.97 像と核: 例題 4 改変)(25 点)

$\mathbb{R}^5$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 f を $f(x) = Ax$ で与えるとき、 f の像 $\text{Im}f$ および核 $\text{Ker}f$ (ヌル空間) の次元と 1 組の基底を求めよ.

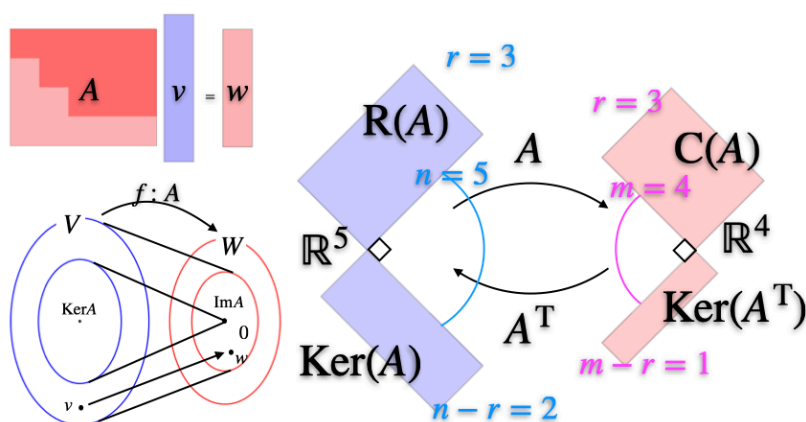


図 1: 写像プロット.