情報科学科　数式処理演習　pair リハーサル試験　試験問題

以下の問題を Maple を用いて自力で解き，出力して提出せよ．60 点以下ならチーム解消．

1. (a) (Einstein 結晶のエネルギー) 次の関数 $E(x)$ を求めて x=0..2 でプロットせよ．(15 点)

$$Z(x) = \frac{\exp(1/x)}{1 - \exp(-1/x)}$$
$$E(x) = x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(Z(x))$$

   (b) 資料を参考にして，次の 2 重積分を求めよ．(15 点)

$$\int\int_D \sqrt{2x^2 - y^2}dxdy, \quad D : 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$$

2. (a) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の対角化行列を求めて，対角化せよ．(15 点)

   (b) 資料を参考にして，行列 $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & a \\ b & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ が直交行列であるとき，a, b を求めよ．(15 点)

3. p を実数とし，$f(x) = x^3 - p\,x$ とする．

   (a) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう．$f(x)$ の導関数は，

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\, x^{\boxed{\text{イ}}} - p$$

   である．したがって，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば，

$$\boxed{\text{ア}}\, a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$$

   が成り立つ．さらに $x = a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{\text{エ } (p > 0)}$ を満たす場合は $f(x)$ は必ず極値を持つことがわかる．

   (b) 関数 $f(x)$ が $x = \dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする．また，曲線 $y = f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3}, f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ を A とする．
   $f(x)$ が $x = \dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p = \boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり，$x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる．

曲線 C の接線で，点 A を通り傾きが 0 でないものを l とする．l の方程式を求めよう．l と C の接点の x 座標を b とすると，l は点 $(b, f(b))$ における C の接線であるから，l の方程式は b を用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}}\, b^2 - \boxed{\text{コ}}\right)(x-b) + f(b)$$

と表すことができる．また，l は点 A を通るから，方程式

$$\boxed{\text{サ}}\, b^3 - \boxed{\text{シ}}\, b^2 + 1 = 0$$

を得る．この方程式を解くと，

$$b = \boxed{\text{ス}}\,,\ \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるが，l の傾きが 0 でないことから，l の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\, x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である．

点 A を頂点とし，原点を通る放物線を D とする．l と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x \geqq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう．D の方程式は，

$$y = \boxed{\text{ニ}}\, x^2 - \boxed{\text{ヌ}}\, x$$

であるから，定積分を計算することにより，$S = \dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる．(10 点)

(2014 年度大学入試センター試験　本試験　数学 II・B 第 2 問)

4. ．前問 3(b) の C 上の頂点 A の座標を $\left(\dfrac{p}{4}, f\left(\dfrac{p}{4}\right)\right)$ と変えて問題を解け．ただし数値を変えたので，それほど複雑な数字にはならないが，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カキ}}$ 等には箱にこだわらず数字がはいる．最後は $S = \dfrac{34}{27}$ ではなく，$S = \dfrac{352}{243}$ になる．(30 点)