寺田・坂田, 「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

例題 9 ――― **関数の導関数 (1)**

つぎの関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ (2) $y = \cos(\sin x)$

Maple Ex (3) $y = e^{x^x}$ $(x > 0)$ (4) $y = \cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

解答 (1) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2} = (x^2+1)^{2/3}$

$$y' = \frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}\cdot 2x = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}$$

(2) $u = \sin x$ とおくと, $y = \cos u$. p.16 の定理 16 (合成関数の導関数) より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\sin u\cdot\cos x = -\sin(\sin x)\cdot\cos x$$

(3) $y = e^{x^x}(x > 0)$ は $y = e^{(x^x)}$ という意味である. この両辺の対数をとると $\log y = x^x$. この両辺を x で微分すると $y'/y = (x^x)'$ となる.

$u = x^x$ とおき, u' を求める. そのためこの両辺の対数をとると $\log u = x\log x$. この両辺を x で微分すると $u'/u = \log x + 1$. よって $u' = x^x(\log x + 1)$.

$$\therefore\ y' = e^{x^x}\cdot x^x(\log x + 1)$$

(4) $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$= -\frac{x^2+1}{2x}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)} = -\frac{2}{x^2+1} \quad (x > 0)$$

問 題

9.1 つぎの関数の導関数を求めよ.

(1) e^{x^2} (2) $x^2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ $(-1 < x < 1,\ x \neq 0)$

15-2 (3) $\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}$ (4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (5) $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a > 0)$

(6) $(\tan x)^{\sin x}$ $(0 < x < \pi/2)$ (7) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$

9.2 つぎの関数の導関数を求めよ.

15-1 (1) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (2) $y = \cos^{-1}\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$

(3) $y = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

例題 10 ――― **関数の導関数 (2)**

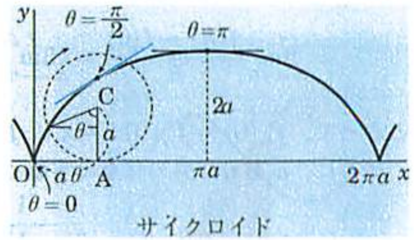
サイクロイド $\left.\begin{aligned} x &= a(\theta-\sin\theta) \\ y &= a(1-\cos\theta)\end{aligned}\right\}$ 上の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ.

ただし $a > 0$ とする.

解答 p.17 の定理 18 (媒介変数を用いて表される関数の導関数) を用いる.

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

よって, $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$



$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$x = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a, \quad y = a, \quad \frac{dy}{dx} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

したがって, 接線の方程式は

$$y - a = 1\cdot\left\{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a\right\} \quad よって, \quad y = x+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a$$

問 題

10.1 つぎの関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ (結果は t の関数のままでよい).

15-2

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\end{cases}$ $(a > 0)$ (2) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = t^3\end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t)\end{cases}$ $(a > 0)$

10.2 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ の導関数を求めよ.

寺田・坂田, 「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

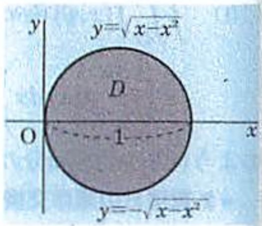
例題 1 ―― **2重積分 (1)**

(1) つぎの2重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq x$$

(2) $f(x,y)=1$ のとき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は D の面積に等しいことを示せ．

解答 (1) $x^2+y^2=x$ は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形することによって，中心が $(1/2, 0)$ で半径が $1/2$ の円である．D はこの円の周および内部である．この D を x に関する単純な領域と考える (p.86)．よって，



$$I=\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy$$

$$=\int_0^1 [\sqrt{x}y]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

いま，$\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$．よって

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=2\int_1^0 (1-t^2)t(-2t)dt$$

$$=4\int_0^1 (t^2-t^4)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

(2) p.85 の2重積分の定義(1)により，$f(x,y)=1$ のとき $f(x_i,y_i)\Delta S_i=\Delta S_i$ である．よって

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta S_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta S_i = D\text{ の面積}$$

問 題

1.1 つぎの2重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D: y-\frac{1}{4}x^2 \geqq 0,\ y-x\leqq 0,\ x\geqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0\leqq y\leqq 1,\ y\leqq x\leqq 10y$

11-2

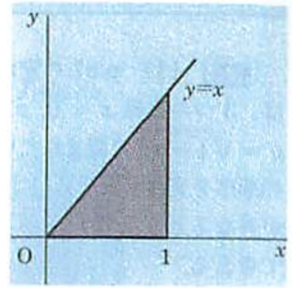
例題 2 ―― **2重積分 (2)**

(1) つぎの2重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0\leqq y\leqq x\leqq 1$$

(2) 曲面 $z=e^{px+qy}$ $(pq \neq 0)$ が xy 平面の正方形 $D=\{(x,y): 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ との間につくる立体の体積を求めよ．

解答 (1) 右図を x に関する単純な領域とみる．p.35 の不定積分の公式(7)より，



$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy$$

$$=\int_0^1 \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2x}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\frac{\pi}{6}\right)dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $I=\displaystyle\iint_D e^{px}\cdot e^{qy}\,dx\,dy$ で変数に関して分離された形である．p.87 の(10)より

$$I=\left(\int_0^1 e^{px}dx\right)\left(\int_0^1 e^{qy}dy\right)=\left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^1\cdot\left[\frac{e^{qx}}{q}\right]_0^1=\frac{e^p-1}{p}\cdot\frac{e^q-1}{q}$$

問 題

2.1 つぎの2重積分を求めよ．

12-0 (1) $\displaystyle\iint_D \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: 1\leqq y\leqq x\leqq 2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{1+\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right\}d\theta$ (p.65 の図を参照)

(3) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy, \quad D: \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq 1$ (p.53 の上図を参照)

寺田・木村,　「演習と応用 線形代数」(サイエンス社,2000)

6.2 像と核

● 像と核 ●

f を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像とする．

像　$\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$ は $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間でこれを像（空間）という．f の表現行列を $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ するとき

$$\mathrm{Im}\, f = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{で生成される部分空間})$$

$$\Rightarrow \quad \dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\,[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$$

$$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{rank}\,[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n] = \mathrm{rank}\,[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{y}]$$

である．一般に，V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とすると V の像

$$f(V) = \{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x} \in V\}$$

は $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間である．

全射　$\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{R}^m$ のとき，線形写像 f は全射であるという．このとき

$$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m \implies f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \text{ が存在する．}$$

$$f \text{ が全射} \iff \mathrm{rank}\, A = m$$

核　$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であってこれを核（空間）という．このとき

See p.48

$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x}; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$: 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間

$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - \mathrm{rank}\, A$

See p.48

である．一般に，W を $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間とすると，W の逆像

$$f^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \in W\}$$

も $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である．

単射　$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき f を単射であるという．このとき

$$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) \implies \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$$

$$f \text{ が単射} \iff \mathrm{rank}\, A = n$$

次元定理　$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = n$

● 線形写像と 1 次独立性 ●　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ が 1 次独立でも $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k)$ は 1 次独立とは限らないから，線形写像 f は 1 次独立性を保持しないが，

$$f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) : 1 \text{ 次独立} \implies \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k : 1 \text{ 次独立}$$

が成り立つ．

とくに，f が単射ならば 1 次独立性は保持される，すなわち

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k : 1 \text{ 次独立} \implies f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) : 1 \text{ 次独立}$$

例題 4　　像と核

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ とする．$\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき f の $\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

解答　右の表から $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, A = 2$. $\mathrm{Im}\, f$ は A の 4 個の列ベクトルで生成されるから，このうちの 2 個の 1 次独立なベクトルが $\mathrm{Im}\, f$ の基底である．たとえば表から A の第 1 列と第 2 列は 1 次独立だから $\mathrm{Im}\, f$ の 1 組の基底として $(1, -1, 2), (0, 1, 1)$ を採ることができる．

A			
1	0	−1	−2
−1	1	2	3
2	1	−1	−3
1	0	−1	−2
0	1	1	1
0	1	1	1
1	0	−1	−2
0	1	1	1
0	0	0	0

$\mathrm{Ker}\, f$ は同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間だから，表から次元は $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - \mathrm{rank}\, A = 4 - 2 = 2$ であり，解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから $(1, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の 1 組の基底である．

See. P.52

See. P.22, 24, 25

問　題

4.1　つぎの行列を表現行列としてもつ線形写像 f の像空間および核空間を求めよ．

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4.2　$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき，ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 1, 7)$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\}$ および $\boldsymbol{b}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$ を求めよ．

寺田・木村, 「演習と応用 線形代数」(サイエンス社,2000)

15-3

例題 8 ——— 対角化

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が対角化可能ならば変換の行列を求めて対角化せよ．

解答 A の固有多項式は

$$\varphi(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(3-t)$$

だから，固有値は 1, 3 で代数的重複度はそれぞれ 2, 1 である．

右表から $\mathrm{rank}\,(A-E) = 1$ だから固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ の次元（幾何的重複度）は $\dim V(1) = 3 - \mathrm{rank}\,(A-E) = 3 - 1 = 2$ で代数的重複度に一致する．固有値 3 に関しては代数的重複度は 1 だから固有空間 $V(3)$ の次元も 1 である．各固有値に対して幾何的重複度と代数的重複度が一致するから A は対角化可能である．

$A-E$			$A-3E$		
1	1	1	−1	1	1
1	1	1	1	−1	1
0	0	0	0	0	−2
1	1	1	1	−1	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0

固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ は表から

$$V(1) = L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \quad \boldsymbol{x}_1 = {}^t[-1\ \ 1\ \ 0], \quad \boldsymbol{x}_2 = {}^t[-1\ \ 0\ \ 1]$$

で $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $V(1)$ の 1 組の基底である．

固有値 3 に対する固有空間 $V(3)$ に関しても表から

3　$$V(\cancel{1}) = L\{\boldsymbol{x}_3\}, \quad \boldsymbol{x}_3 = {}^t[1\ \ 1\ \ 0]$$

で $\boldsymbol{x}_3$ が $V(3)$ の基底である．P.78

よって，$P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる．

注意 $\boldsymbol{R}^3 = V(1) \oplus V(3)$ である．

問　題

8.1 つぎの行列 A が対角化可能ならば対角化せよ．

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

15-2

例題 9 ——— べき零行列の対角化

A がべき零行列で，$A \neq O$ とすると，A は対角化可能でないことを示せ．

解答 A が対角化可能であるとすると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{は } A \text{ の固有値})$$

となる正則行列 P が存在する．A がべき零行列だから $A^k = O$ として，上式を k 乗すると

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

一方

$$(P^{-1}AP)^k = \overbrace{P^{-1}AP\,P^{-1}AP\,P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}^{k\text{ 個}} = P^{-1}A^kP = P^{-1}OP = O$$

だから

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

よって，

$$A = POP^{-1} = O$$

であるがこれは仮定に反する．

問　題

9.1 $A^2 = A$ ならば対角化可能で，$\mathrm{tr}\,A = \mathrm{rank}\,A$ であることを示せ．

9.2 (a) n 次正方行列 A が相異なる n 個の正の固有値をもつとする．このとき，$B^2 = A$ となる正方行列 B が存在することを示せ．

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ に対し $B^2 = A$ となる B を求めよ．

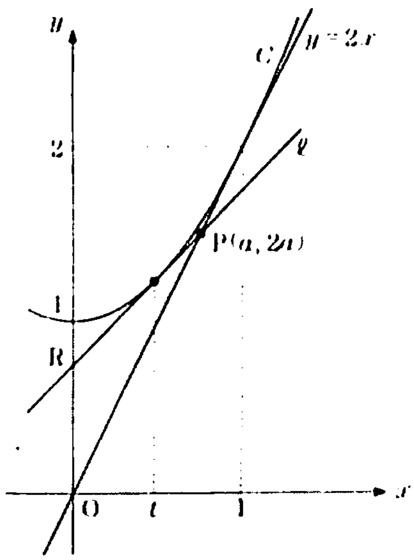
2018－駿台

大学入試センター試験過去問題集 数学I·A, II·B

(駿台予備学校 2017)

第2問 （数学II 微分・積分の考え）

＜解説＞



$C : y=x^2+1$, $y'=2x$

(1) C 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2+1$

$\iff y=2tx-t^2+1$ ……②

この接線が点 $\mathrm{P}(a,\ 2a)$ を通るとき

$2a=2t\cdot a-t^2+1$ ……③

$\iff t^2-2at+2a-1=0$

$\iff \{t-(2a-1)\}(t-1)=0$

$\iff t=2a-1,\ 1$

P を通る接線が 2 本あるのは，t の 2 次方程式 ③ が異なる 2 つの実数解をもつときであるから

$2a-1\neq 1 \iff a\neq 1$

このとき，接線の方程式は ② より

$t=2a-1$ のとき

$y=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1$

$\iff y=(4a-2)x-4a^2+4a$ ……①

$t=1$ のとき

$y=2x$

(2) ℓ (①) と y 軸の交点が $\mathrm{R}(0,\ r)$ であるから

$r=-4a^2+4a$

であり，$r>0$ となるのは

$-4a^2+4a>0$

$\iff 4a(a-1)<0$

$\iff 0<a<1$

このとき

$S=\triangle\mathrm{OPR}=\dfrac{1}{2}\cdot r\cdot(\mathrm{P}\ の\ x\ 座標)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(-4a^2+4a)\cdot a$

$=2(a^2-a^3)$

$S'=2(2a-3a^2)$

$=-2a(3a-2)$

$0<a<1$ における S の増減表は，次のようになる。

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

よって，S は $a=\dfrac{2}{3}$ のとき最大で

最大値 $2\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right\}=\dfrac{8}{27}$

(3) $0<a<1$ のとき，$0\leqq x\leqq a$ において，C は ℓ の上側（または接する）にあるので

$$T=\int_0^a\{x^2+1-((4a-2)x-4a^2+4a)\}dx$$

$$=\int_0^a\{x^2-(4a-2)x+4a^2-4a+1\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-(2a-1)x^2+(4a^2-4a+1)x\right]_0^a$$

$$=\frac{a^3}{3}-(2a-1)a^2+(4a^2-4a+1)a$$

$$=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a$$

$$T'=7a^2-6a+1$$

$$=7\left(a-\frac{3}{7}\right)^2-\frac{2}{7}$$

a の 2 次関数 T' の軸：$a=\dfrac{3}{7}$ について，$\dfrac{3}{7}<\dfrac{2}{3}$ より，$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ において T' は増加するので

$$T'\geqq 7\left(\frac{2}{3}\right)^2-6\left(\frac{2}{3}\right)+1=\frac{1}{9}>0$$

よって，この範囲で $T'>0$ であるから，T は増加する。（②）

(注)

$$T=\int_0^a\{x^2-2(2a-1)x+(2a-1)^2\}dx$$

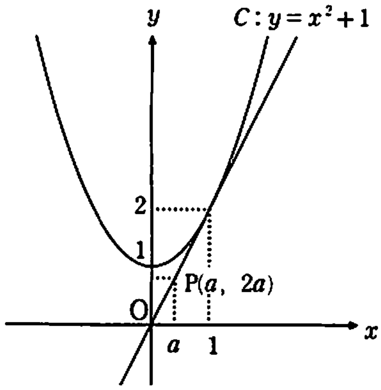
$$=\int_0^a(x-2a+1)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2a+1)^3\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}\{(-a+1)^3-(-2a+1)^3\}$$

$$=\frac{1}{3}(7a^3-9a^2+3a)$$

第 2 問



(1) $y=x^2+1$ より，

$$y'=2x$$

よって， $x=t$ での微分係数は $2t$ なので，

点 $(t,\ t^2+1)$ における C の接線の方程式は，

$$y=2t(x-t)+t^2+1$$

すなわち，

$$y=\underline{\underline{2}}tx-t^2+\underline{\underline{1}}\quad\cdots\cdots②$$ ……ア，イ

この直線が $\mathrm{P}(a,\ 2a)$ を通るとき，$2a=2t\cdot a-t^2+1$ より，

$$t^2-\underline{\underline{2}}at+\underline{\underline{2}}a-\underline{\underline{1}}=0\quad\cdots\cdots③$$ ……ウ，エ，オ

を満たす。よって，③より，$(t-2a+1)(t-1)=0$ となり，

$$t=\underline{\underline{2}}a-\underline{\underline{1}},\ \underline{\underline{1}}\quad\cdots\cdots④$$ ……カ，キ，ク

である。

ここで，P を通る C の接線が 2 本あるのは，④で得られた 2 つの接点の x 座標，$2a-1$ と 1 が異なるときである。

よって，

$$2a-1\neq 1$$

すなわち，

$$a\neq\underline{\underline{1}}$$ ……ケ

であり，このとき，P を通る 2 本の接線の方程式は，②に④の t の値を代入して，

$$y=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1$$

すなわち，

$$y=(\underline{\underline{4}}a-\underline{\underline{2}})x-\underline{\underline{4}}a^2+\underline{\underline{4}}a\quad\cdots\cdots①$$ ……コ，サ，シ，ス

と

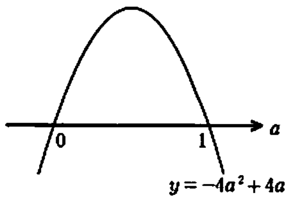
$$y=2\cdot 1x-1^2+1$$

すなわち，

$$y=\underline{\underline{2}}x$$ ……セ

である。

(2) $r=-4a^2+4a$ であるから，$r>0$ となるのは，

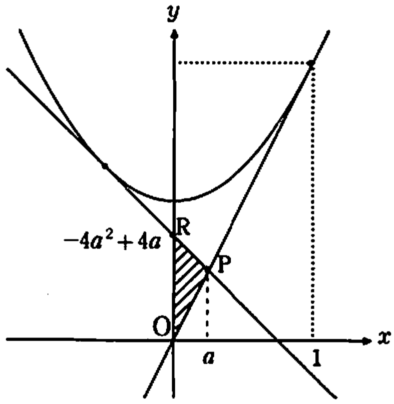


$$-4a^2+4a>0$$
$$a(a-1)<0$$

より，

$$\underline{\underline{0}}<a<\underline{\underline{1}}$$ ……ソ，タ

のときである。



このとき，△OPR は，OR を底辺と見たとき，高さが P の x 座標 a である三角形なので，その面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\times(-4a^2+4a)\times a$$

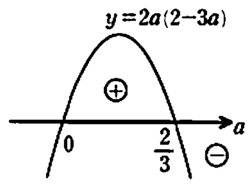
$$=2(a^2-a^3)$$　……チ，ツ，テ

となる。

$f(a)=2(a^2-a^3)$ とおくと，

$$f'(a)=2(2a-3a^2)$$

$$=-6a\left(a-\frac{2}{3}\right)$$



であるから，$0<a<1$ のとき，$f(a)$ の増減は右下のようになる。

よって，$S\,(=f(a))$ は $a=\frac{2}{3}$ のとき，　……ト，ナ

a	0	…	$\frac{2}{3}$	…	1
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$		↗		↘	

最大値

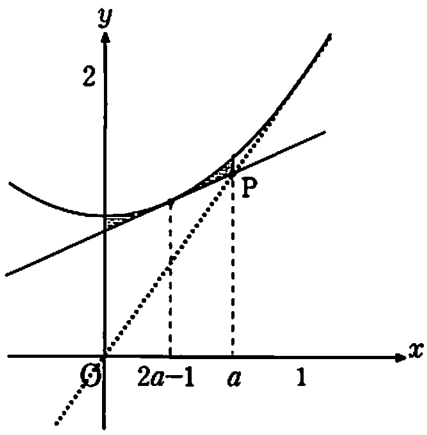
$$f\left(\frac{2}{3}\right)=2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$=2\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$$　……ニ，ヌネ

をとる。

(3) 求める面積 T は右図の網目部分の面積で，



$$T=\int_0^a\left[x^2+1-\{(4a-2)x-4a^2+4a\}\right]dx$$

$$=\int_0^a\{x^2-(4a-2)x+4a^2-4a+1\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-(2a-1)x^2+(4a^2-4a+1)x\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{3}a^3-(2a-1)a^2+(4a^2-4a+1)a$$

$$=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a$$　……ノ，ハ，ヒ，フ

よって，

$$g(a)=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a$$

とおくと，

$$g'(a)=7a^2-6a+1$$

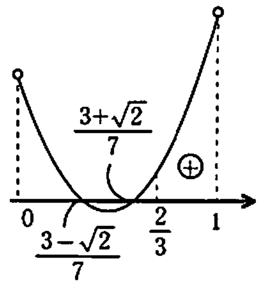
ここで，$g'(a)=0$ となる a は $a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}$ であり，

$$\frac{2}{3}-\frac{3+\sqrt{2}}{7}=\frac{5-3\sqrt{2}}{21}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{18}}{21}>0$$

であるから，

$$\frac{2}{3}\leqq a<1 \text{ で } g'(a)>0$$

よって，$T\left(=g(a)\right)$ は $\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ で増加する。



$\left(\cdots\cdots②\right)$ ……ヘ

(注) T の計算を行うには，数学IIIの範囲の計算であるが，

$$\int(x-a)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いる方法もあり，接線と囲む面積を求める際に特に有用である。

$$l: y=(4a-2)x-4a^2+4a$$

は，C の $x=2a-1$ における接線なので，

$$\begin{aligned}&x^2+1-\left\{(4a-2)x-4a^2+4a\right\}\\&=x^2-2(2a-1)x+(2a-1)^2\\&=\{x-(2a-1)\}^2\end{aligned}$$

と表される。よって，

$$\begin{aligned}T&=\int_0^a\{x-(2a-1)\}^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}\{x-(2a-1)\}^3\right]_0^a\\&=\frac{1}{3}(-a+1)^3-\frac{1}{3}(-2a+1)^3\\&=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a\end{aligned}$$

……ノ，ハ，ヒ，フ