「演習と応用 微分積分」 寺田・坂田（サイエンス社）

例題 1 **2重積分 (1)**

(1) つぎの2重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq x$$

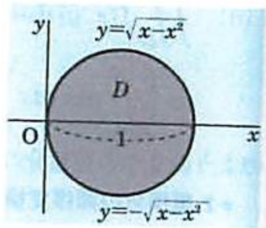
(2) $f(x,y)=1$ のとき，$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は D の面積に等しいことを示せ．

解答 (1) $x^2+y^2=x$ は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形することによって，中心が $(1/2,0)$ で半径が $1/2$ の円である．D はこの円の周および内部である．この D を x に関する単純な領域と考える（p.86）．よって，

$$I=\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\,dy$$

$$=\int_0^1 [\sqrt{x}y]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$



いま，$\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$．よって

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=2\int_1^0 (1-t^2)t(-2t)dt$$

$$=4\int_0^1 (t^2-t^4)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

(2) p.85 の2重積分の定義(1)により，$f(x,y)=1$ のとき $f(x_i,y_i)\Delta S_i=\Delta S_i$ である．よって

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=D\text{ の面積}$$

問　題

1.1 つぎの2重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D: y-\frac{1}{4}x^2 \geqq 0,\ y-x\leqq 0,\ x\geqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0\leqq y\leqq 1,\ y\leqq x\leqq 10y$

11-2

例題 2 **2重積分 (2)**

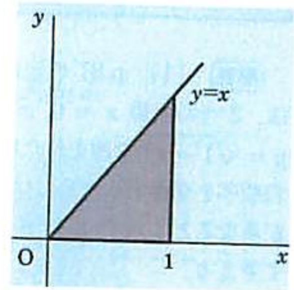
(1) つぎの2重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0\leqq y\leqq x\leqq 1$$

(2) 曲面 $z=e^{px+qy}$ $(pq \neq 0)$

が xy 平面の正方形 $D=\{(x,y): 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ との間につくる立体の体積を求めよ．

解答 (1) 右図を x に関する単純な領域とみる．p.35 の不定積分の公式(7)より，



$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2x}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\frac{\pi}{6}\right)dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $I=\iint_D e^{px}\cdot e^{qy}\,dx\,dy$ で変数に関して分離された形である．p.87 の(10)より

$$I=\left(\int_0^1 e^{px}dx\right)\left(\int_0^1 e^{qy}dy\right)=\left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^1\cdot\left[\frac{e^{qx}}{q}\right]_0^1=\frac{e^p-1}{p}\cdot\frac{e^q-1}{q}$$

問　題

2.1 つぎの2重積分を求めよ．

12-0 (1) $\displaystyle\iint_D \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: 1\leqq y\leqq x\leqq 2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{1+\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right\}d\theta$ （p.65 の図を参照）

(3) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy, \quad D: \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq 1$ （p.53 の上図を参照）

「演習と応用 線形代数」 寺田・木村 (サイエンス社)

例題 2 —— **1 次結合**

$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (3,-1,3)$, $\boldsymbol{b} = (-2,1,1)$ をベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (2,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-4,3,1)$ の 1 次結合で表せ.

解答 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3], \boldsymbol{x} = {}^t[x_1\ x_2\ x_3]$ とするとき連立 1 次方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \qquad ①$$

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad ②$$

をそれぞれ解けばよい.

右の表から①は解

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 1-2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

(λ は任意) を持つから, たとえば $\lambda = 0$ として $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ を得る.

また, ②は

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = 2, \quad \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{b}] = 3$$

が等しくないからは解を持たない. つまり, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合として表せない.

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
2	−1	−4	3	−2
−1	1	3	−1	1
1	1	1	3	1
1	1	1	3	1
0	2	4	2	2
0	−3	−6	−3	−4
1	0	−1	2	0
0	1	2	1	1
0	0	0	0	−1

注意 この例のように $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}$ は 1 次従属であるが $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}$ のどれもが残りのベクトルの 1 次結合で表されるというわけではない.

問 題

2.1 $\boldsymbol{R}^3$ において $\boldsymbol{a} = (2,-1,a)$ が $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,2,2)$ の 1 次結合であるように a を定めよ.

2.2 $\boldsymbol{R}^3$ のつぎのベクトルは 1 次従属か. 1 次従属ならば, そのうちの 1 つを他の 2 つのベクトルの 1 次結合として表せ.

(a) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1,1,8)$

(b) $\boldsymbol{a}_1 = (2,-2,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,1)$

例題 3 —— **1 次結合と独立性**

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ は 1 次独立であるかどうか調べよ.

解答

$$x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) + z(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

となるのはどんな場合か調べてみる. 上式から

$$(x+y+z)\boldsymbol{a} + (x-y-3z)\boldsymbol{b} + 2z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

で $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立だから, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の係数がそれぞれ 0 でなくてはならない. よって連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ \quad\quad\ +2z = 0 \end{cases}$$

を得る. 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & +2 \end{bmatrix}$ の階数は $\operatorname{rank} A = 3$ (または $\det A = -4 \neq 0$) だからこの方程式は非自明解を持たない. すなわち, 解は

$$x = y = z = 0$$

だけである. よって, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ は 1 次独立である.

A		
1	1	1
1	−1	−3
0	0	+2
1	1	2
0	−2	−4
0	0	+2

問 題

3.1 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立のとき, つぎのベクトルは 1 次独立かどうか調べよ.

(a) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$

(b) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$

(c) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$

3.2 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を $\boldsymbol{R}^n$ の m 個の 1 次独立なベクトルとし, m 個のベクトルを

$$\boldsymbol{b}_j = p_{1j}\boldsymbol{a}_1 + p_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{mj}\boldsymbol{a}_m \quad (j = 1,2,\ldots,m)$$

とする. このとき, つぎが成り立つことを示せ.

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m \text{ が 1 次独立} \iff \operatorname{rank}[p_{ij}] = m$$

「演習と応用 線形代数」寺田・木村（サイエンス社）

例題 14 ―― **グラム・シュミットの直交化法**

グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を作れ．

$$\boldsymbol{x}_1=(-2,1,0),\quad \boldsymbol{x}_2=(-1,0,1),\quad \boldsymbol{x}_3=(1,1,1)$$

解答　まず $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1$ とおくと

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$$

つぎに

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1=(-1,0,1)-\frac{2}{5}(-2,1,0)=\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},1\right)$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_2=\frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)=\left(-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_3&=\boldsymbol{x}_3-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2\\&=(1,1,1)+\frac{1}{5}(-2,1,0)-\frac{1}{15}(-1,-2,5)=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_3=\frac{\boldsymbol{y}_3}{|\boldsymbol{y}_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

P.60

a_1, a_2で

$\underbrace{\text{正規}}_{}\underbrace{\text{直交}}_{}$を確認しながら計算.

$\sqrt{a_1\cdot a_1}$　$a_2\cdot a_1=0$　$a_3\cdot a_1=0$

$a_2\cdot a_3=0$

問　題

14.1　グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから各空間の正規直交基底を作れ．

(a)　$\boldsymbol{R}^2$ において，$\boldsymbol{x}_1=(-1,3)$, $\boldsymbol{x}_2=(2,-1)$

(b)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{x}_2=(1,0,1)$, $\boldsymbol{x}_3=(0,1,1)$

(c)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{x}_2=(1,0,1)$, $\boldsymbol{x}_3=(-1,0,1)$

(d)　$\boldsymbol{R}^4$ において，$\boldsymbol{x}_1=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{x}_2=(0,1,1,0)$, $\boldsymbol{x}_3=(0,0,1,1)$, $\boldsymbol{x}_4=(1,1,0,1)$

例題 15 ―― **直交補空間**

(a)　V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．

$$V^\perp=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n;\ \text{すべての}\ \boldsymbol{y}\in V\ \text{に対して}\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になることを示せ（これを V の直交補空間という）．

(b)　$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in\boldsymbol{R}^3;\ 3x_1+x_2-x_3=0,\ x_1-5x_2+x_3=0\}$ の直交補空間 $V^\perp$ を求めよ．

解答　(a)　零ベクトル $\boldsymbol{0}$ はどんなベクトルとも直交するから $\boldsymbol{0}\in V$．よって $V^\perp$ は空でない．V のかってなベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V^\perp\quad&\Longrightarrow\quad(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}=0\\\boldsymbol{x}\in V^\perp,\lambda\in\boldsymbol{R}\quad&\Longrightarrow\quad(\lambda\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\lambda\boldsymbol{x}\in V$ だから V は部分空間をなす．

(b)　同次連立1次方程式

$$\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\x_1-5x_2+x_3=0\end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
3	1	−1
1	−5	1
1	−5	1
0	16	−4
1	0	−1/4
0	1	−1/4

を解くと，表から $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$．

よって，$(1,1,4)$ は V の基底であり，その直交補空間は

$$V^\perp=\{(x_1,x_2,x_3);\ x_1+x_2+4x_3=0\}$$

である．$V^\perp$ の基底を求めるために方程式 $x_1+x_2+4x_3=0$ を解くと

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}$$

よって，$V^\perp$ の基底 $(-1,1,0),(-4,0,1)$ で生成される部分空間である．

注意　$(3,1,-1),(1,-5,1)$ も $V^\perp$ の基底である．

問　題

15.1　$\boldsymbol{R}^n=V\oplus V^\perp$ であることを示せ．

15.2　つぎのベクトルで生成される各部分空間 V の直交補空間 $V^\perp$ を求めよ．

(a)　$(1,0,-7)$

(b)　$(3,1,-1),\ (1,-5,1)$

(c)　$(1,0,-1,2),\ (-1,1,1,0)$

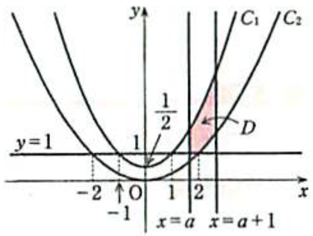
数学社
2017年度センター試験
過去問研究
数学Ⅰ·A／Ⅱ·B

第2問 標準 《面積，最大・最小》

$$C_1 : y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

$$C_2 : y=\frac{1}{4}x^2$$

(1) 右図の赤く塗られた部分 D の面積 S は



$$S=\int_a^{a+1}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx$$

$$=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\boxed{4}}x^2+\frac{1}{\boxed{2}}\right)dx$$

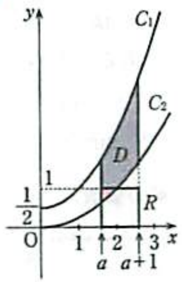
$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x\right]_a^{a+1}=\frac{(a+1)^3-a^3}{12}+\frac{(a+1)-a}{2}$$

$$=\frac{3a^2+3a+1}{12}+\frac{1}{2}$$

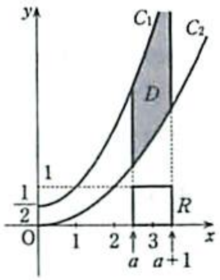
$$=\frac{a^2}{\boxed{4}}+\frac{a}{\boxed{4}}+\frac{\boxed{7}}{\boxed{12}}=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{48}$$

である。S は $a=\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{25}}{\boxed{48}}$ をとる。

(2) 上図より，直線 $y=1$ は，C_1 と $(\pm\boxed{1},\ 1)$ で，C_2 と $(\pm\boxed{2},\ 1)$ で交わることがわかる。a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，4点 $(a,\ 0)$，$(a+1,\ 0)$，$(a+1,\ 1)$，$(a,\ 1)$ を頂点とする正方形 R と(1)の図形 D の共通部分については，a の値に応じて右図のようになる。したがって，正方形 R と図形 D の共通部分（図の赤く塗られた部分）が空集合にならないのは $0\leqq a\leqq\boxed{2}$ のときである。



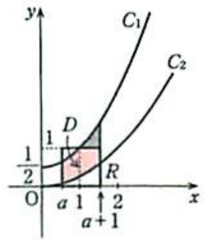
(1≦a≦2)



(2≦a)

$1\leqq a\leqq 2$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲で a が増加するとき，R と D の共通部分の面積 T は減少する。$\boxed{ツ}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である。

したがって，T が最大になる a の値は，$0\leqq a\leqq 1$ の範囲にある。



(0≦a≦1)

る。$0\leqq a\leqq 1$ のとき，(1)の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分（図のグレーに塗られた部分）は，図より，C_1 と2直線 $y=1$，$x=a+1$ で囲まれた図形であるから，その面積 U は

$$U=\int_1^{a+1}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-1\right\}dx=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x\right]_1^{a+1}=\frac{(a+1)^3-1^3}{6}-\frac{(a+1)-1}{2}$$

$$=\frac{a^3+3a^2+3a}{6}-\frac{a}{2}=\frac{a^3}{\boxed{6}}+\frac{a^2}{\boxed{2}}$$

である。よって，$0\leqq a\leqq 1$ において

$$T=S-U=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}-\left(\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{a^3}{\boxed{6}}-\frac{a^2}{\boxed{4}}+\frac{a}{\boxed{4}}+\frac{7}{12}\quad\cdots\cdots①$$

①の右辺の増減を調べる。

$$\frac{dT}{da}=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(2a^2+2a-1)\quad(0\leqq a\leqq 1)$$

$\dfrac{dT}{da}=0$ より，$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ であるから $0\leqq a\leqq 1$ における T の増減は右表のようになる。よって，T は

a	0	…	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	…	1
$\frac{dT}{da}$	／	+	0	−	／
T	$\frac{7}{12}$	↗	極大	↘	$\frac{5}{12}$

$$a=\frac{\boxed{-1}+\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

で最大値をとることがわかる。

解説

(1) C_1 はつねに C_2 の上側にあるので S を与える定積分の立式は簡単である。また，定積分の計算結果は a の2次式であるから，S の最小値を求めることも容易である。

(2) 図をていねいに描いて，R と D の共通部分を正しく把握することが肝心である。$a=2$ のとき R と D の共通部分は点 $(2,\ 1)$ のみであり，$a>2$ に対しては共通部分はなくなる。また，$1\leqq a\leqq 2$ のとき，共通部分の面積は，a の増加とともに減少することも図から容易にわかる。

本問では最大値を求める必要はないが，最大値も求められるようにしておきたい。

①に $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ を直接代入することはすすめられない。次のようにするのが定石