v.18.0 2018/06/01 実施

情報科学科　数式処理演習　最終個別　試験問題

以下の問題を sympy を用いて group で解き，出力して提出せよ．問題 3,4 で，解析的に積分を実行するときは，係数を Rational で指定するように．

1. (a) 関数 $\sin x \cos^3 x$(=`sin(x)*cos(x)^3`) を 15 次程度まで Taylor 展開し，両方の関数を x=0..Pi/2 で同時に plot せよ．また，最初の関数を x=0..x で積分して得られた関数を示せ．さらに得られた関数を最初の関数とともに 0..2*Pi で plot せよ．(20 点)

   (b) 資料を参考にして，次の 2 重積分を求めよ．(10 点)

$$\int\int_D \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}y^2}\ dxdy, \quad D : 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$$

2. (a) 資料を参考にして，$\boldsymbol{R^n}$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立のとき，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ は一次独立であるかどうか調べよ．(15 点)

   (b) 資料を参考にして，グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をつくれ．(15 点)

$$\boldsymbol{x}_1 = (1,1,0), \quad \boldsymbol{x}_2 = (1,0,-1), \quad \boldsymbol{x}_3 = (0,-1,1)$$

3. 座標平面上で，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ を C_1 とし，放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ を C_2 とする．

   (a) 実数 a に対して，2 直線 $x = a, x = a+1$ と C_1, C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}} x^2 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \right) dx \\ &= \frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{エ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \end{aligned}$$

   である．S は $a = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる．

   (b) 4 点 $(a,0), (a+1,0), (a+1,1), (a,1)$ を頂点とする正方形を R で表す．a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，正方形 R と (a) の図形 D の共通部分の面積を T とおく．T が最大となる a の値を求めよう．
   直線 $y = 1$ は C_1 と $\left(\pm\boxed{\text{ソ}}, 1\right)$ で，C_2 と $\left(\pm\boxed{\text{タ}}, 1\right)$ で交わる．したがって，正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のときである．

$\boxed{\text{ソ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲で a が増加するとき，T は $\boxed{\text{ツ　減少する}}$.

したがって，T が最大になる a の値は，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある．

$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ のとき，(a) の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$$

である．よって，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{ヌ}}} + \frac{\text{オ}}{\boxed{\text{カキ}}} \tag{1}$$

である．(1) の右辺の増減を調べることにより，T は

$$a = \frac{\boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \tag{2}$$

で最大値をとることがわかる．(10 点)
(2016 年度大学入試センター試験　本試験　数学 II・B 第 2 問)

4. ．前問 3 の C_2 の放物線を $y = 0.1x^2$ と変えて問題を解け．ただし数値を変えたので，$\boxed{\text{ウ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ 等には，箱にこだわらず 8 桁程度の実数を求めよ．最後は $a = 0.7165151384$ になる．(30 点)
次ページの補足も参考にせよ．

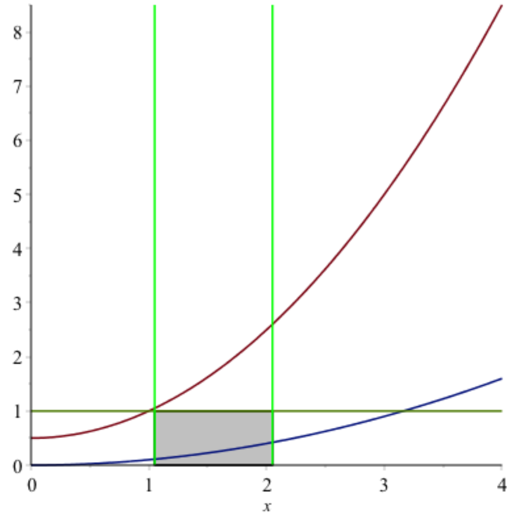

図 1: 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$ および $y = 0.1x^2$ のグラフ．$a = 1.05$ の場合の正方形 R を灰色で示している．

補足 図形を表示させるには以下のようにする．

```
restart; with(plottools):with(plots):
c1:=x->0.5*x^2+0.5;
c2:=x->0.1*x^2;
a:=1.05;x_max:=4;
p1:=plot([c1(x),c2(x),1],x=0..x_max):
l1:=line([a,0],[a,c1(x_max)],color=green):
l2:=line([a+1,0],[a+1,c1(x_max)],color=green):
rect:=rectangle([a,0],[a+1,1],color=gray):
display(p1,l1,l2,rect);
```

これは a:=1.05 での表示．この plot スクリプトを計算の途中で入れた場合，以降で計算を進めるには，a の値を reset するために，

```
a:='a';
```

とする必要がある．