

情報科学科 数式処理演習 最終個別 試験問題

以下の問題を Maple を用いて自力で解き，出力して提出せよ．80 点以下のメンバーがいるグループは来週補講．

1. (a) 関数 $\sin x \cos^3 x (= \sin(x) * \cos(x)^3)$ を 15 次程度まで Taylor 展開し，両方の関数を $x=0..Pi/2$ で同時に plot せよ．また，最初の関数を $x=0..x$ で積分して得られた関数を示せ．さらに得られた関数を最初の関数とともに $0..2*Pi$ で plot せよ．(20 点)
- (b) 資料を参考にして，次の 2 重積分を求めよ．(10 点)

$$\iint_D \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}y^2} \, dx dy, \quad D: 0 \leq y \leq x \leq 1$$

2. (a) 資料を参考にして， \mathbf{R}^n のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立のとき， $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ は一次独立であるかどうか調べよ．(15 点)
- (b) 資料を参考にして，グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから \mathbf{R}^3 の正規直交基底をつくれ．(15 点)

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0, -1), \quad \mathbf{x}_3 = (0, -1, 1)$$

3. 座標平面上で，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ を C_1 とし，放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ を C_2 とする．
- (a) 実数 a に対して，2 直線 $x = a, x = a + 1$ と C_1, C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}} x^2 + \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \right) dx \\ &= \frac{a^2}{\boxed{\text{ウ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{エ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \end{aligned}$$

である． S は $a = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ をとる．

- (b) 4 点 $(a, 0), (a + 1, 0), (a + 1, 1), (a, 1)$ を頂点とする正方形を R で表す． a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき，正方形 R と (a) の図形 D の共通部分の面積を T とおく． T が最大となる a の値を求めよう．
- 直線 $y = 1$ は C_1 と $(\pm \boxed{\text{ソ}}, 1)$ で， C_2 と $(\pm \boxed{\text{タ}}, 1)$ で交わる．したがって，正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは， $0 \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ のときである．

$\boxed{\text{ソ}} \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ のとき、正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり、この範囲で a が増加するとき、 T は $\boxed{\text{ツ}}$ 減少する。

したがって、 T が最大になる a の値は、 $0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ のとき、(a) の図形 D のうち、正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。よって、 $0 \leq a \leq \boxed{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{ヌ}}} + \frac{\text{オ}}{\boxed{\text{カキ}}} \quad (1)$$

である。(1) の右辺の増減を調べることにより、 T は

$$a = \frac{\boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \quad (2)$$

で最大値をとることがわかる。(10点)

(2016年度大学入試センター試験 本試験 数学II・B 第2問)

4. . 前問3の C_2 の放物線を $y = 0.1x^2$ と変えて問題を解け。ただし数値を変えたので、 $\boxed{\text{ウ}}$ 、 $\boxed{\text{オ}}$ 、 $\boxed{\text{カキ}}$ 等には、箱にこだわらず8桁程度の実数を求めよ。最後は $a = 0.7165151384$ になる。(30点)

次ページの補足も参考にせよ。

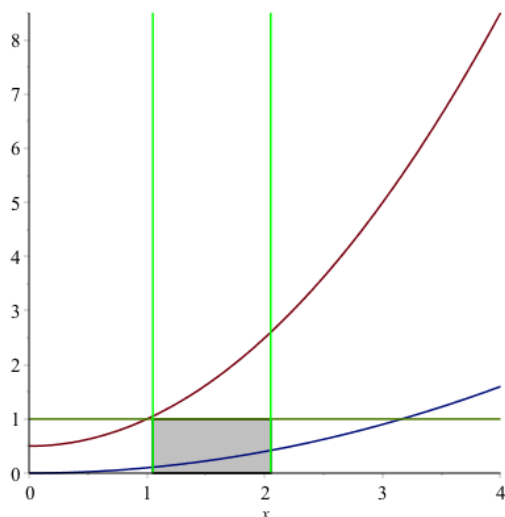


図 1: 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ および $y = 0.1x^2$ のグラフ. $a = 1.05$ の場合の正方形 R を灰色で示している.

補足 図形を表示させるには以下のようにする.

```
restart; with(plottools):with(plots):
c1:=x->0.5*x^2+0.5;
c2:=x->0.1*x^2;
a:=1.05;x_max:=4;
p1:=plot([c1(x),c2(x),1],x=0..x_max):
l1:=line([a,0],[a,c1(x_max)],color=green):
l2:=line([a+1,0],[a+1,c1(x_max)],color=green):
rect:=rectangle([a,0],[a+1,1],color=gray):
display(p1,l1,l2,rect);
```

これは $a=1.05$ での表示. この plot スクリプトを計算の途中で入れた場合, 以降で計算を進めるには, a の値を reset するために,

```
a:='a';
```

とする必要がある.