寺田・坂田，「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

例題 9 ―― 関数の導関数 (1)

つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $y=\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ (2) $y=\cos(\sin x)$

Maple Ex (3) $y=e^{x^x}$ $(x>0)$ (4) $y=\cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

解答 (1) $y=\sqrt[3]{(x^2+1)^2}=(x^2+1)^{2/3}$

$$y'=\frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}\cdot 2x=\frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}$$

(2) $u=\sin x$ とおくと，$y=\cos u$．p.16 の定理 16（合成関数の導関数）より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\sin u\cdot\cos x=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$$

(3) $y=e^{x^x}\ (x>0)$ は $y=e^{(x^x)}$ という意味である．この両辺の対数をとると $\log y=x^x$．この両辺を x で微分すると $y'/y=(x^x)'$ となる．

$u=x^x$ とおき，u' を求める．そのためこの両辺の対数をとると $\log u=x\log x$．この両辺を x で微分すると $u'/u=\log x+1$．よって $u'=x^x(\log x+1)$．

$$\therefore\quad y'=e^{x^x}\cdot x^x(\log x+1)$$

(4) $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$=-\frac{x^2+1}{2x}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)}=-\frac{2}{x^2+1}\quad(x>0)$$

問 題

9.1 つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) e^{x^2} (2) $x^2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ $(-1<x<1,\ x\neq 0)$

15-2 (3) $\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}$ (4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (5) $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$

(6) $(\tan x)^{\sin x}$ $(0<x<\pi/2)$ (7) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$

9.2 つぎの関数の導関数を求めよ．

15-1 (1) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (2) $y=\cos^{-1}\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$

(3) $y=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

例題 10 ―― 関数の導関数 (2)

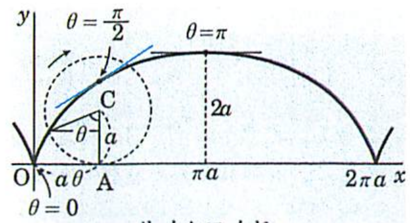
サイクロイド $\left.\begin{array}{l}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{array}\right\}$ 上の $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ．ただし $a>0$ とする．

解答 p.17 の定理 18（媒介変数を用いて表される関数の導関数）を用いる．

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

よって，
$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$



サイクロイド

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$x=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a,\quad y=a,\quad \frac{dy}{dx}=\cot\frac{\pi}{4}=1$$

したがって，接線の方程式は

$$y-a=1\cdot\left\{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a\right\}\quad よって，\quad y=x+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a$$

問 題

10.1 つぎの関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ（結果は t の関数のままでよい）．

15-2

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(a>0)$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t^3\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$

10.2 双曲線関数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ の導関数を求めよ．

寺田・坂田,「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

例題 5* **2重積分の変数の変換 ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$)**

つぎの2重積分を $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変数を変換して求めよ．

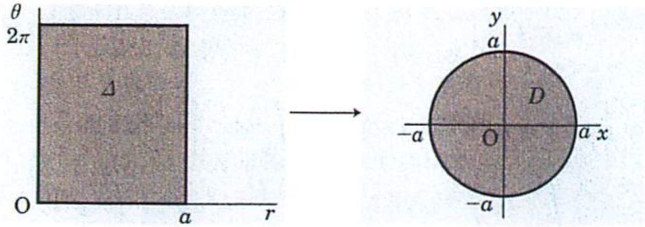
$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \quad D : x^2 + y^2 \leqq a^2 \quad (a > 0)$$

解答 p.91 の定理4 (2重積分の変数の変換) を用いる．

極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ に変数を変換する．$r\theta$ 平面の領域 Δ を

$$\Delta = \{(r,\theta) : 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

とおくと，Δ は $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって D に写像される．このとき



(i) 線分 $r = 0$ は原点に写像され，線分 $\theta = 0$ 上の点と $\theta = 2\pi$ 上の点も同じ点に写像される．それ以外では Δ の点と D の点は1対1である．

(ii) ヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ は $r = 0$ 以外では0にならない．

例外の点では面積が0になっているので積分値には関係しないので p.91 の定理4を用いることができる．よって，

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint_\Delta r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\,dr\right) = \frac{\pi a^4}{2}$$

問 題

5.1 つぎの2重積分の値を計算せよ ($x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変換せよ)．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy, \quad D : x^2 + y^2 \leqq x$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad D : (x^2 + y^2)^2 \leqq x^2 - y^2,\ x \geqq 0$ （連珠形）

(3) $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dx\,dy, \quad D : x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

* 極座標に変数を変換するとき，対応が1対1でない点が存在する．しかし，それらの点の面積は上の(i), (ii)のように0であるので，以後は問題にしない．

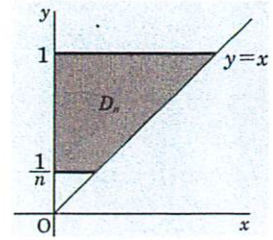
例題 6 **広義の2重積分（不連続な点，不連続な曲線のある場合）**

つぎの広義の2重積分を求めよ．

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad D : 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$$

解答 p.91 の広義の2重積分を用いる．被積分関数は閉領域 D で正で，原点以外では連続である．よって D の近似増加列 $\{D_n\}$ をつぎのようにとる．

$$D_n \ :\ 0 \leqq x \leqq y,\ \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1$$



$$\begin{aligned}
I_n &= \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{1/n}^1 dy \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx \\
&= \int_{1/n}^1 \left[\log(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right]_0^y dy \\
&= \int_{1/n}^1 \{\log(1 + \sqrt{2})y - \log y\}\,dy \\
&= \int_{1/n}^1 \log(1 + \sqrt{2})\,dy = \log(1 + \sqrt{2})[y]_{1/n}^1 = \log(1 + \sqrt{2})\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\to \log(1 + \sqrt{2}) \quad (n \to \infty)$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \log(1 + \sqrt{2})$$

問 題

6.1 つぎの広義の2重積分を求めよ．

(1)* $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(y - x)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \quad D : 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$

— 15-2 22 $\alpha = 1/3$

(2)** $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x + y)^{3/2}}, \quad D : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$

(3)*** $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} \quad (\alpha > 0), \quad D : x^2 + y^2 \leqq 1$

* 被積分関数が直線 $y = x$ 上の点で不連続であるが，この場合も p.91 の広義の2重積分と同様に考えて，近似増加列は $D_n : 1/n \leqq y \leqq 1,\ y \geqq x + 1/n$ とせよ．

** 原点で被積分関数が不連続である．近似増加列は D から $0 \leqq x \leqq 1/n,\ 0 \leqq y \leqq 1/n$ を除いたものとせよ．

*** 原点で被積分関数が不連続である．近似増加列は $D_n : 1/n^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1$ とせよ．

, $B>0$)

ントとなる。

……Ⓒ

$\geqq 0$ と $a+b<0$ 以外の場合

$\Longrightarrow q$

を満たす a, b の中にはⒸ

. そのような a, b に対し

. p は成り立たない。

第2問 標準 《2次関数，平行移動，最小値》

(2016-Pair Maple

x=2

y=6.5)

2017年版 センター試験 過去問研究 数学IA/IIB (数学社) 2016

$$y=ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ①$$

$x=-1$, $y=4$ を①に代入すると

$$a-b+c=4 \quad \cdots\cdots ②$$

$x=2$, $y=7$ を①に代入すると

$$4a+2b+c=7 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③を b, c について解くことにより

$$b=\boxed{-}\,a+\boxed{1},\quad c=\boxed{-2}\,a+\boxed{5}$$

このとき，①は

$$y=ax^2-(a-1)x-2a+5 \quad \cdots\cdots ④$$

$$=a\left(x-\frac{a-1}{2a}\right)^2+\frac{-9a^2+22a-1}{4a}$$

ゆえに，①のグラフの頂点の座標を $(p,\ q)$ とすると

$$p=\frac{a-\boxed{1}}{\boxed{2}\,a},\quad q=\frac{\boxed{-9}\,a^2+\boxed{22}\,a-\boxed{1}}{\boxed{4}\,a}$$

(1) $a=2$ のとき，①の頂点は $(p,\ q)=\left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{8}\right)$ である。ゆえに，①のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{-7}}{\boxed{8}}$ だけ平行移動すると，$y=2x^2$ のグラフに一致する。

(2) ①のグラフが y 軸に関して対称になるのは，放物線の軸の x 座標（頂点の x 座標）が0のときである。すなわち

$$p=\frac{a-1}{2a}=0 \qquad \therefore\ a=1$$

このとき，頂点の y 座標は

$$q=\frac{-9\cdot1^2+22\cdot1-1}{4\cdot1}=\boxed{3}$$

(3) ①のグラフは，$a>0$ より下に凸の放物線である。よって，その最小値は頂点の y 座標に等しい。ゆえに，条件より

$$\frac{-9a^2+22a-1}{4a}=0 \qquad 9a^2-22a+1=0$$

$$\therefore\ a=\frac{\boxed{11}\pm\boxed{4}\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{9}}$$ （いずれも $a>0$ を満たす）

(4) ①（つまり④）の右辺を $f(x)$ とおく。$a>0$ より

$$\frac{a-1}{2a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}<\frac{1}{2}\ (<1)$$

であるから，$1 \leqq x \leqq 2$ における①の最小値は $f(1)$ である。よって，条件より

$$f(1)=a-(a-1)-2a+5=-2a+6=0$$

$$\therefore\quad a=\boxed{3}\quad (a>0\ を満たす)$$

解説

2次関数 $f(x)$ が

$$f(x)=a(x-p)^2+q$$

と変形できるとき，そのグラフの頂点の座標は $(p,\ q)$ である。

(1) 放物線の移動は，頂点の移動に着目するとわかりやすい。

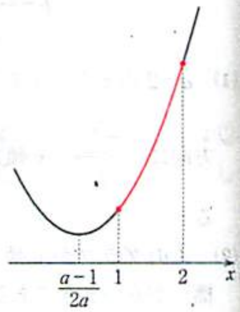
(2) 2次関数のグラフ（放物線）はその軸に関して対称である。したがって，y 軸を軸とする放物線は，y 軸に関して対称である。

(3) 2次関数のグラフが下に凸であるとき（x^2 の係数が正のとき），その2次関数は頂点において最小値をとる。

(4) 軸の x 座標 $\frac{a-1}{2a}$ は，$a>0$ のとき

$$\frac{a-1}{2a}<\frac{1}{2}\ (<1)$$

を満たす。したがって，①のグラフは右図のようになり，$1 \leqq x \leqq 2$ においては $x=1$ で最小値をとる。



第3問 標準 〈

DB＝4，BE＝6，ED＝5 た

理を適用して

$5^2=4^2+6^2-2\cdot 4$

$\therefore\quad \cos\angle DBE=\frac{9}{16}$

0°＜∠DBE＜180° より，si

$\sin\angle DBE=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right.}$

また

△DBE＝

＝

(2) △DBE の内接円の半径

DB，BE，ED に引いた

だから

△DBE＝△IDB＋△I

$=\frac{1}{2}r\cdot DB+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}r(4+6+5$

①，②より

円 I と BE との接点を L，

BL＝B

とすると

BE＝$x+$

これを x，y，z について解