2022年度　数式処理演習　pair試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2022/11/24実施

- file: ~/symbolic_math/22_pair/22_pair_ans.ipynb
- make problem: ruby text_dir/bin/pick_works_from_ans.rb 22_pair/22_pair_ans.ipynb -1 '27' '8 9 10 28 32'

以下の問題を python で解き，LUNA へ提出せよ．LUNA へは ipynb と pdf 形式の２種類を提出すること．

問 1 微積分

1(a) 関数の概形(15 点)

（テキスト p.144 の図 4.35 の確認)

ガウス関数

$$y = \exp\left(-\frac{x^2}{2\mathrm{sigma}^2}\right)$$

の概形を

```
sigma = 2
plt.xlim(-10,10)
plt.ylim(-0.5,1.5)
```

で描け．

1(b) 関数の積分(15 点)

sympy において，

```
sigma = symbols('sigma',positive = True)
```

を指定することで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

を求めよ．

問 2 線形代数

2(a) 共分散の逆行列(15 点)

ここではΣを共分散とする． sigma = np.array([[2,1],[1,2]]) の逆行列Σ^{-1}を求めよ．

さらに検算せよ．

2(b) 一般的な 2 次元ガウス関数(15 点)

さらに，sympy で v = Matrix([x0,x1]) として， $v^T\Sigma^{-1}v$を求めよ．

得られた式を$\exp$の指数部に入れて規格化した関数の 3d プロットは以下の通りとなる（テキストp.150, 図4.37）

注意 ：： 配列同士の内積にはテキストでは， numpy.matmulのoperator　'@'を使っている． 2次元配列(行列)の内積では，　numpy.dotから呼び出され同じ結果を返す． マニュアルではmatmulの使用を推奨している(https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.dot.html#numpy.dot).

In [5]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gauss(x0, x1, mu, sigma):
    x = np.array([x0,x1])
    a=1/(2*np.pi)*1/(np.linalg.det(sigma) ** (1/2))
    inv_sigma = np.linalg.inv(sigma)
    y=a * np.exp(
        (-1/2)*(x-mu).T @ inv_sigma @(x-mu))
    return y
```

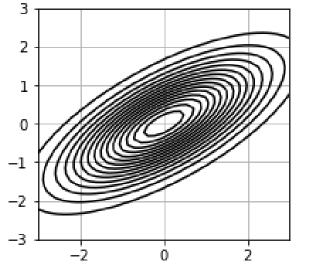
In [6]:
```
mu=np.array([0,0])
sigma =np.array([[2,1],[1,1]])
x0_min, x0_max = -3,3
x1_min, x1_max = -3,3

x0_n, x1_n = 40, 40
x0 =np.linspace(x0_min,x0_max, x0_n)
x1 =np.linspace(x1_min,x1_max, x1_n)

f = np.zeros((x1_n, x0_n))
for i0 in range(x0_n):
    for i1 in range(x1_n):
        f[i1,i0] = gauss(x0[i0],x1[i1], mu, sigma)
xx0, xx1 = np.meshgrid(x0,x1)

plt.figure(figsize=(7,3))

plt.subplot(1,2,1)
cont = plt.contour(xx0, xx1, f, levels=15, colors="black")
plt.grid()
```



問 3 センター試験原題(20 点)

(2020 大学入試センター試験　数学 II・B/追試験 第 2 問)

a, b, c を実数とし， 関数$f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$を考える． 座標平面上の曲線$y = f(x)$を$C_1$とし, 曲線$y = g(x)$ をC_2とする． C_2は点 A(-1,-2)を通り， C_2の A における接線は C_1の A における接線と一致するものとする．

(1) 曲線C_1の点 A における接線をlとする． $f'(-1) = \boxed{ア}$により， lの方程式は

$y = \boxed{イ}x + \boxed{ウ}$である． また，原点 O の直線$l$の距離は $\frac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{エオ}}$である．

ヒント：問４での数値改変に備えて，x0=-1, y0=f.subs({x:x0})として問題を解いていけ．

(2) 曲線C_2の点 A における接線は(1)の直線lと一致しているので， $g'(-1) = \boxed{カ}$である． したがって，b, cをaを用いて表すと， $b = \boxed{キ}a$, $c = \boxed{ク} - \boxed{ケ}$となる．

(3) $a = -2$のとき，関数$g(x)$は $\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$で極大値 $\frac{\boxed{スセソ}}{\boxed{タチ}}$をとり， $\boxed{ツ}$で極小値 $\boxed{テトナ}$をとる．

解答注意

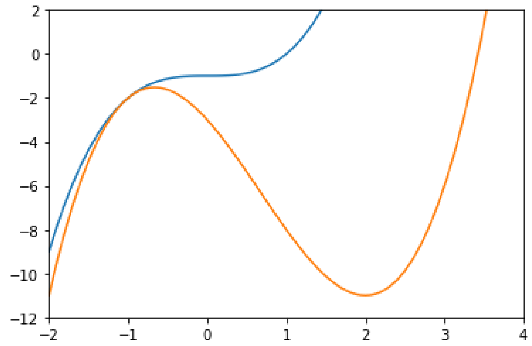
- 極大値は浮動小数点数でも良い．(分数で出したかったらRationalを使え)
- $\boxed{ア}, \boxed{イ}, \boxed{ウ}, \dots$ を明示する(あるいは書き出す)必要はない．
- 以下は関数$f(x), g(x : a = -2, x0 = -1)$のplotである．解答の検算の参考とせよ．

In [20]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g_curve = x**3 - 2*x**2 - 4*x - 3
xx_n = 100
xx =np.linspace(-2, 4, xx_n)

gY = np.zeros(xx_n)
fY = np.zeros(xx_n)
for i0 in range(xx_n):
    gY[i0] = g_curve.subs({x:xx[i0]})
    fY[i0] = f.subs({x:xx[i0]})

plt.plot(xx, fY)
plt.plot(xx, gY)
plt.xlim(-2,4)
plt.ylim(-12,2)
plt.show()
```



問 4 センター試験改変(20 点)

点 A のx座標を$-1/2$として同様に求めると， $a = -2$では$g(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3/2$となることを確かめよ．

さらに, 点 A のx座標が-1.1で, $a = -2$の時の$g(x)$を求めよ． f(x)およびg(x; a=-2, x0=-1.1)を同時プロットすると以下の通りとなる．

In [23]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx_n = 100
xx =np.linspace(-2, 4, xx_n)

gY = np.zeros(xx_n)
fY = np.zeros(xx_n)
for i0 in range(xx_n):
    gY[i0] = g_curve.subs({x:xx[i0]})
    fY[i0] = f.subs({x:xx[i0]})

plt.plot(xx, fY)
plt.plot(xx, gY)
plt.xlim(-2,4)
plt.ylim(-12,2)
plt.show()
```