共通テスト過去問研究数学IA/IIB, (教学社,2021).

ポイント 対数の基本性質（$\boxed{}$内が指数法則）

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とする。

$\log_a M=m,\ \log_a N=n$ とおくと，$M=a^m,\ N=a^n$ である。

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N \longleftarrow MN=\boxed{a^m\times a^n=a^{m+n}}=a^{\log_a M+\log_a N}$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N \longleftarrow \frac{M}{N}=\boxed{\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}=a^{\log_a M-\log_a N}$$

$$\log_a M^p=p\log_a M \longleftarrow M^p=\boxed{(a^m)^p=a^{pm}}=a^{p\log_a M}\quad (p\text{ は実数})$$

対数 $\log_a M$ を，b（$b>0,\ b\neq 1$）を底とする対数で表したい場合には，次の底の変換公式を用いる。

ポイント 底の変換公式

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ M>0$ とする。

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}\longleftarrow\left(\begin{array}{l}\log_a M=m\text{ のとき}\qquad M=a^m\\ \text{よって，}\log_b M=\log_b a^m=m\log_b a\\ \qquad\qquad\qquad=(\log_a M)(\log_b a)\end{array}\right)$$

②から④を導く計算は次のようにしてもよい。

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1\qquad \log_2\frac{x+2}{y+3}=-1$$

$$\frac{x+2}{y+3}=2^{-1}=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ y=2x+1$$

指数関数 $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ はつねに正の減少関数である。〔解答〕に図を示しておいた。

$x>-2$ のとき，$0<t<9$ となることは，その図を見ればよいが，$\frac{1}{3}=3^{-1}$ として，次のように考えてもよい。

$$0<t=3^{-x}<3^2=9\quad (x>-2\ \text{より}\ \ -x<2)$$

第2問 標準 《極値，共通接線，面積》

$C:y=f(x)=x^3+px^2+qx$　（$p,\ q$ は実数）

$D:y=-kx^2$

A：点 $(a,\ -ka^2)$　（$k>0,\ a>0$）

(1) 関数 $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるので，$f'(-1)=\boxed{0}$ である。その極値は 2 であるから $f(-1)=2$ である。

$$f'(x)=3x^2+2px+q\quad\text{より}\quad f'(-1)=3-2p+q=0\qquad\therefore\ 2p-q=3$$

また

$$f(-1)=-1+p-q=2\qquad\therefore\ p-q=3$$

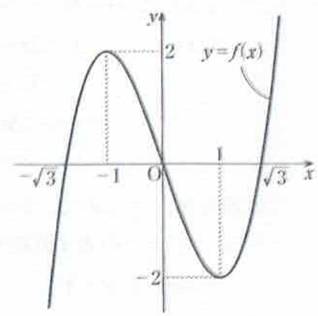
この 2 式より，$p=\boxed{0}$，$q=\boxed{-3}$ である。したがって

$$f(x)=x^3-3x=x(x^2-3)=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$$

となるから，右の増減表が得られ，$f(x)$ は $x=\boxed{1}$ で極小値 $\boxed{-2}$ をとる。また，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標が $-\sqrt{3}$，0，$\sqrt{3}$ であることを考慮すれば，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



(2) 点 A $(a,\ -ka^2)$（$k>0,\ a>0$）における放物線 $D:y=-kx^2$（$y'=-2kx$）の接線 ℓ の方程式は

$$y-(-ka^2)=-2ka(x-a)$$

$$\therefore\ \ell:y=\boxed{-2}kax+ka^{\boxed{2}}\quad\cdots\cdots①$$

と表せる。ℓ と x 軸の交点の x 座標は

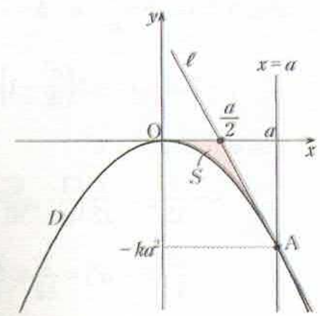
$$0=-2kax+ka^2\qquad 2kax=ka^2$$

$$\therefore\ x=\frac{ka^2}{2ka}=\frac{\boxed{a}}{\boxed{2}}\qquad (k\neq 0,\ a\neq 0)$$

であり，D と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^a\{-(-kx^2)\}dx=\int_0^a kx^2dx=\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{k}{\boxed{3}}a^{\boxed{3}}$$



である。よって，D と ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積 S は，上の面積から三角形 $\left(底辺\ a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2},\ 高さ\ ka^2\right)$ の面積を差し引くことによって

$$S=\frac{k}{3}a^3-\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times ka^2=\frac{k}{3}a^3-\frac{k}{4}a^3=\frac{k}{\boxed{12}}a^3$$

である。

(3)　点 A$(a,\ -ka^2)$ が $C: y=x^3-3x$ 上にあるとき

$$-ka^2=a^3-3a$$

が成り立つから

$$k=\frac{a^3-3a}{-a^2}=-a+\frac{3}{a}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{a}}-\boxed{a}\quad(a\neq0)$$

である。(2)の接線 ℓ が C にも接するとき，ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ の方程式は b を用いて

$$y-f(b)=f'(b)(x-b)$$

$$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$$

$$\therefore\quad \ell: y=\boxed{3}(b^2-\boxed{1})x-\boxed{2}b^3\quad\cdots\cdots②$$

と表される。②の右辺を $g(x)$ とおくと，$f(x)=g(x)$ は重解 b をもつので，$f(x)-g(x)$ は $(x-b)^2=x^2-2bx+b^2$ を因数にもつ。これを用いて

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}\\&=x^3-3b^2x+2b^3\\&=(x^2-2bx+b^2)(x+2b)\\&=(x-\boxed{b})^2(x+\boxed{2}b)\end{aligned}$$

と因数分解されるので，$a=-2b$ となる（点Aの x 座標は a であり，同時に $-2b$ である）。①と②の表す直線の傾きを比較することにより

$$-2ka=3(b^2-1)$$

が成り立ち，$k=\frac{3}{a}-a$，$b=-\frac{1}{2}a$ を代入すれば

$$-2(3-a^2)=3\left(\frac{a^2}{4}-1\right)\qquad\frac{5}{4}a^2=3\qquad\therefore\quad a^2=\frac{\boxed{12}}{\boxed{5}}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}S&=\frac{k}{12}a^3=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{a}-a\right)a^3=\frac{1}{12}(3a^2-a^4)\\&=\frac{a^2}{12}(3-a^2)=\frac{1}{12}\times\frac{12}{5}\left(3-\frac{12}{5}\right)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{25}}\end{aligned}$$

である。

解説

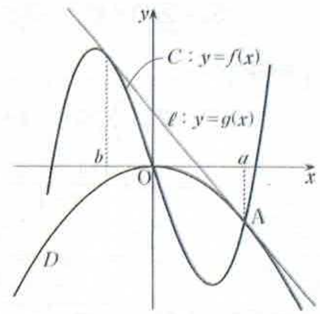
(1)　$f(x)=x^3-3x$ は，$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$ が成り立つから奇関数である。奇関数のグラフは原点対称であるので，$x=-1$ で極値2をとるならば，増減表を見るまでもなく，$x=1$ で極値 -2 をとることがわかる。

(2)　接線の方程式に関する出題は毎年のようにある。

> **ポイント**　**接線の方程式**
>
> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ におけるこの曲線の接線の方程式は
>
> $y-f(t)=f'(t)(x-t)$

面積については，図を見ながら考える習慣をつけておきたい。

(3)　C と D と ℓ を図示すると右図のようになる。



この図を見れば，ℓ と C が $x=b$ で接し，$x=a$ で交わることがよくわかるであろう。つまり，3次方程式 $f(x)=g(x)$ は $x=b$ を重解にもち，他の解は $x=a$ となるのであるから

$$f(x)-g(x)=(x-b)^2(x-a)$$

とならなければならないのである。それで $a=-2b$ となるのである。

なお，$f(x)-g(x)$ の因数分解では，

$x^3-3b^2x+2b^3$ を $(x-b)^2$ で割って，商を求めてもよい。

ℓ の方程式を $y=h(x)=-2kax+ka^2=(2a^2-6)x+3a-a^3$ $\left(①と\ k=\frac{3}{a}-a\ より\right)$ とおいても

$$f(x)-h(x)=(x-b)^2(x-a)$$

とならなければならない。実際

$$\begin{aligned}f(x)-h(x)&=x^3-3x-\{(2a^2-6)x+3a-a^3\}\\&=x^3-(2a^2-3)x-3a+a^3\\&=(x-a)(x^2+ax-a^2+3)\end{aligned}$$

となり，$x^2+ax-a^2+3=0$ が重解 b $\left(=-\frac{a}{2}\right)$ をもつことから，判別式を0とおくことにより

$$a^2-4(-a^2+3)=0\qquad 5a^2=12\qquad\therefore\quad a^2=\frac{12}{5}$$

が得られる。