Table of Contents

2021年度　数式処理演習　pair試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2021/12/2実施

- file: ~/symbolic_math/exams/21_pair_ans.ipynb

以下の問題をpythonで解き，LUNAへ提出せよ．LUNAへはipynbとpdf形式の２種類を提出すること．

1微積分

1(a) 関数の概形(15点)

（テキストp.216の図6.6の確認)

直線$y=-2x+4$が, シグモイド関数

$$\sigma(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

を通す($y=\sigma(-2x+4)$）ことによって0と1の範囲に潰されることを確認せよ．

sympyのplotに対してy軸の表示範囲は，オプション

```
ylim=(-1,2)
```

をつけることで指定できる．

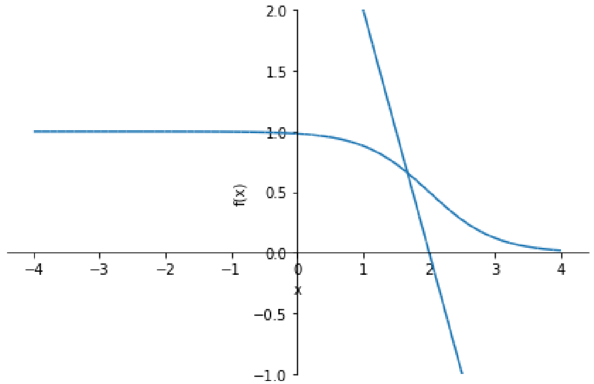
In [141]:
```python
from sympy import *
# init_session()
x,y = symbols('x y')
```

In [142]:
```python
y1=-2*x+4
```

In [143]:
```python
y2=1/(1+exp(-(-2*x+4)))
```

In [144]:
```python
%matplotlib inline

plot(y1,y2,(x,-4,4),ylim=(-1,2))
```



Out[14⋯ <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fb801cd27f0>

1(b) シグモイド関数(15点)

（テキストp.131の4-118式の確認)

シグモイド関数

$$\sigma(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

の増減，極値，凹凸を調べ，曲線$y=\sigma(x)$の概形を描け．シグモイド関数の微分が

$$\sigma(x)(1-\sigma(x))$$

に一致することを確かめよ．両者を同時にプロットすることでも確かめられる．ただし，曲線は重なるので，どちらかをy軸方向に0.01程度ずらして表示すること．

In [145]:
```python
from sympy import *
# init_session()
x,y = symbols('x y')
```

In [146]:
```python
y = 1/(1+exp(-x))
y
```

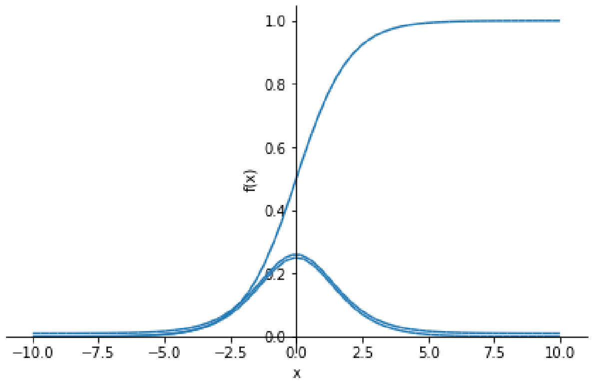
Out[14⋯
$$\frac{1}{1+e^{-x}}$$

In [147]:
```python
dy = diff(y, x)
dy
```

Out[14⋯
$$\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

In [148]:
```python
%matplotlib inline

plot(y,y*(1-y)+0.01,dy,(x,-10,10))
```



Out[14…
```
<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fb7f1f09a60>
```

2 線形代数

2(a) 転置(15点)

(テキストp.115, 4-94式の確認)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{\mathrm{T}}$$

に対して，公式

$$(\ AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

が成り立つことを確かめよ．

In [149]:
```
from sympy import *

#init_session()
#init_printing(use_unicode=True)
init_printing()
list_a = [1,2,3]
list_b = [4,5,6]
A=Matrix([list_a, list_b])
A
```

Out[14…

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

In [150]:
```
B = A.T
(A*B).T # (AB).T
```

Out[15…

$$\begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

In [151]:
```
B.T * A.T
```

Out[15…

$$\begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

2(b) (15点)

次の行列Aの固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

それぞれの固有値（λ_i），固有空間(x_i)に対して，

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

が成立することを確かめよ．

In [152]:
```
from sympy import *
A=Matrix([[-2,-3,3],[1,2,-3],[1,1,-2]])
```

In [153]:
```
A.eigenvects()
```

Out[15…

$$\left[\left(-2,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right),\ \left(-1,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right),\ \left(1,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In [154]:
```
x1,x2,x3=A.eigenvects()
x1[2][0]
```

Out[15…

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In [155]:
```
print(A*x1[2][0])
print(x1[0]*x1[2][0])
```

```
Matrix([[2], [-2], [-2]])
Matrix([[2], [-2], [-2]])
```

In [156]:
```
print(A*x2[2][0])
print(x2[0]*x2[2][0])
```

```
Matrix([[0], [-1], [-1]])
Matrix([[0], [-1], [-1]])
```

In [157]:
```
print(A*x3[2][0])
print(x3[0]*x3[2][0])
```

```
Matrix([[-1], [1], [0]])
Matrix([[-1], [1], [0]])
```

3 センター試験原題(20点)

(2019大学入試センター試験　数学II・B 第2問(1),(2))

p, q を実数とし，関数$f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は$x = -1$で極値2を取るとする．また，座標平面上の曲線$y = f(x)$をC,放物線$y = -kx^2$ をD, 放物線D上の点$(a, -ka^2)$をAとする．ただし， $k > 0, a > 0$である．

(1) 関数$f(x)$が$x = -1$で極値をとるので， $f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$である．これと$f(-1) = 2$より，$p = \boxed{\text{イ}}, q = \boxed{\text{ウエ}}$である．よって$f(x)$は$x = \boxed{\text{オ}}$で極小値$\boxed{\text{カキ}}$をとる．

In [158]:
```
from sympy import *
#init_session()

a,k,p,q,x,y=symbols('a k p q x y')
```

In [159]:
```
fx = x**3+p*x**2+q*x
fx
```

Out[15⋯ $px^2 + qx + x^3$

In [160]:
```
df = diff(fx, x)
df
```

Out[16⋯ $2px + q + 3x^2$

In [161]:
```
x0=-1
y0=2
```

In [162]:
```
e1=fx.subs({x:x0})-y0
e2=df.subs({x:x0})
```

In [163]:
```
{e1,e2}
```

Out[16⋯ $\{-2p + q + 3, p - q - 3\}$

In [164]:
```
subs_pq=solve({e1,e2},{p,q})
subs_pq
```

Out[16⋯ $\{p : 0, \ q : -3\}$

In [165]:
```
sol1 = solve(df.subs(subs_pq),x)
sol1
```

Out[16⋯ $[-1, \ 1]$

In [166]:
```
fx.subs(subs_pq).subs({x:sol1[1]})
```

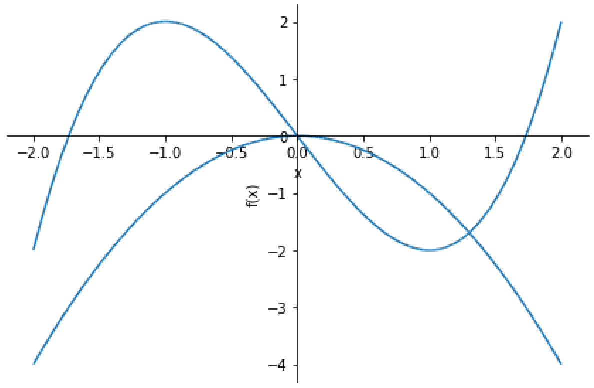
Out[16⋯ -2

In [167]:
```
fx0 = fx.subs(subs_pq)
fx0
```

Out[16⋯ $x^3 - 3x$

In [168]:
```
%matplotlib inline

plot(fx0,-x**2,(x,-2,2))
```



Out[16⋯ <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fb8018984f0>

(2) 点Aにおける放物線Dの接線をlとする．Dとlおよびx軸で囲まれた図形の面積Sを aとkを用いて表そう．

lの方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}}kax + ka^{\boxed{\text{コ}}} \quad \ldots(1)$$

と表せる．lとx軸の交点のx座標は$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$であり，$D$と$x$軸および 直線$x = a$で囲まれた図形の面積は $\dfrac{k}{\boxed{\text{ス}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$である．よって，$S = \dfrac{k}{\boxed{\text{ソタ}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$である．

In [169]:
```
fx2=-k*x**2
fx2
```

Out[16⋯ $-kx^2$

In [170]:
```
aa= diff(fx2,x).subs({x:a})
aa
```

Out[17⋯ $-2ak$

In [171]:
```
ll = expand(aa*(x-a)+fx2.subs({x:a}))
ll
```

Out[17⋯ $a^2k - 2akx$

In [172]:
```
x0 = solve(ll,x)
x0
```

Out[17⋯ $\left[\frac{a}{2}\right]$

In [173]:
```
Sd = -integrate(fx2,(x,0,a))
Sd
```

Out[17⋯ $\frac{a^3k}{3}$

In [174]:
```
SII=-integrate(II,(x,a/2,a))
SII
```
Out[17…

$$\frac{a^3 k}{4}$$

In [175]:
```
SS=Sd - SII
SS
```
Out[17…

$$\frac{a^3 k}{12}$$

4 数値改変(20点)

大問3.において，関数$f(x)$が$x=-0.9$で極値2をとるとして問3(a)を解きなさい． 問3(b)は変わらないので，解く必要ありません． 極小値は-3.66567655334305ぐらいである． さらに，これらの値を用いて，(x,-2,2)で曲線C,Dを同時にプロットしなさい．

追加：kは適当に，例えば，k=1と定めてください．

In [176]:
```
from sympy import *
#init_session()

a,k,p,q,x,y=symbols('a k p q x y')
```
In [177]:
```
fx = x**3+p*x**2+q*x
fx
```
Out[17…

$$px^2 + qx + x^3$$

In [178]:
```
df = diff(fx, x)
df
```
Out[17…

$$2px + q + 3x^2$$

In [179]:
```
x0=-0.9
y0=2
```
In [180]:
```
e1=fx.subs({x:x0})-y0
e2=df.subs({x:x0})
```
In [181]:
```
{e1,e2}
```
Out[18…

$$\{-1.8p + q + 2.43, 0.81p - 0.9q - 2.729\}$$

In [182]:
```
subs_pq=solve({e1,e2},{p,q})
subs_pq
```
Out[18…

$$\{p : -0.669135802469136,\ q : -3.63444444444444\}$$

In [183]:
```
sol1 = solve(df.subs(subs_pq),x)
sol1
```
Out[18…

$$[-0.9,\ 1.34609053497942]$$

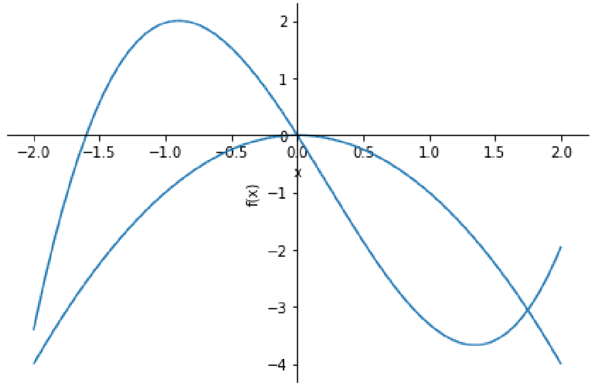
In [184]:
```
fx.subs(subs_pq).subs({x:sol1[1]})
```
Out[18…

$$-3.66567655334305$$

In [185]:
```
fx1 = fx.subs(subs_pq)
fx1
```
Out[18…

$$x^3 - 0.669135802469136x^2 - 3.63444444444444x$$

In [186]:
```
%matplotlib inline

plot(fx1,-x**2,(x,-2,2))
```


Out[18… <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fb7f21c3820>

In [ ]: