

# Table of Contents

- 1 微積分
  - 1.1 1(a) 関数の概形(15点)
  - 1.2 1(b) シグモイド関数(15点)
- 2 線形代数
  - 2.1 2(a) 転置(15点)
  - 2.2 2(b) (15点)
- 3 センター試験原題(20点)
- 4 数値改変(20点)

## 2021年度 数式処理演習 pair試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2021/12/2実施

- file: ~/symbolic\_math/exams/21\_pair\_ans.ipynb

以下の問題をpythonで解き、LUNAへ提出せよ。LUNAへはipynbとpdf形式の2種類を提出すること。

## 1 微積分

### 1(a) 関数の概形(15点)

(テキストp.216の図6.6の確認)

直線 $y = -2x + 4$ が、シグモイド関数

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

を通す( $y = \sigma(-2x + 4)$ ) ことによって0と1の範囲に潰されることを確認せよ。

sympyのplotに対してy軸の表示範囲は、オプション

```
ylim=(-1,2)
```

をつけることで指定できる。

### 1(b) シグモイド関数(15点)

(テキストp.131の4-118式の確認)

シグモイド関数

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

の増減、極値、凹凸を調べ、曲線 $y = \sigma(x)$ の概形を描け。シグモイド関数の微分が

$$\sigma(x)(1 - \sigma(x))$$

に一致することを確認せよ。両者を同時にプロットすることでも確かめられる。ただし、曲線は重なるので、どちらかをy軸方向に0.01程度ずらして表示すること。

## 2 線形代数

### 2(a) 転置(15点)

(テキストp.115, 4-94式の確認)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T$$

に対して、公式

$$(AB)^T = B^T A^T$$

が成り立つことを確かめよ。

### 2(b) (15点)

次の行列 $A$ の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

それぞれの固有値 $(\lambda_i)$ 、固有空間 $(x_i)$ に対して、

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

が成立することを確認せよ。

## 3 センター試験原題(20点)

(2019大学入試センター試験 数学II・B 第2問(1),(2))

$p, q$  を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$  は $x = -1$ で極値2を取るとする。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を $C$ 、放物線 $y = -kx^2$ を $D$ 、放物線 $D$ 上の点 $(a, -ka^2)$ を $A$ とする。ただし、 $k > 0, a > 0$ である。

(1) 関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので、 $f'(-1) = \text{ア}$ である。これと $f(-1) = 2$ より、 $p = \text{イ}$ 、 $q = \text{ウエ}$ である。よって $f(x)$ は $x = \text{オ}$ で極小値 $\text{カキ}$ をとる。

(2) 点 $A$ における放物線 $D$ の接線を $l$ とする。 $D$ と $l$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ を $a$ と $k$ を用いて表そう。

$l$ の方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}} kax + ka\boxed{\text{コ}} \dots(1)$$

と表せる。  $l$ と  $x$ 軸の交点の  $x$ 座標は  $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$  であり、  $D$ と  $x$ 軸および 直線  $x = a$  で囲まれた図形の面積は  $\frac{k}{\boxed{\text{ス}}} a\boxed{\text{セ}}$  である。 よって、  $S = \frac{k}{\boxed{\text{ソタ}}} a\boxed{\text{セ}}$  である。

## 4 数値改変(20点)

大問3.において、関数  $f(x)$  が  $x = -0.9$  で極値2をとるとして問3(a)を解きなさい。 問3(b)は変わらないので、解く必要ありません。 極小値は  $-3.66567655334305$  ぐらいである。 さらに、これらの値を用いて、  $(x, -2, 2)$  で曲線  $C, D$  を同時にプロットしなさい。

追加:  $k$  は適当に、例えば、  $k=1$  と定めてください。