4.2　基底，次元，成分

◦ 基底, 次元 ◦　n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の n 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基底という．$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{R}^n$ のかってなベクトルとすると $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合である．

標準的な基底　$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底である．これを $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な基底という．

基底の補充 (取り替え) 定理　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_m$ を m 個の 1 次独立な $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルとするとき，$n-m$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{a}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を選んで，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{a}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基底であるようにすることができる．

次元　基底を構成する個数を次元といい，dim で表す．$\dim \boldsymbol{R}^n = n$ である．

◦ 基底に関する成分 ◦　$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基底とする．$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

と一意的に表される．この実数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を $\boldsymbol{a}$ の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する成分といい，

$$\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

とかく．したがって，$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は $\boldsymbol{a}$ の標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 関する成分である．$A = [\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ とおくと

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

である．

◦ 2 組の基底の関係 ◦　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基底，$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルとし

$$\boldsymbol{a}'_j = p_{1j}\boldsymbol{a}_1 + p_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{a}_n \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

とする．このとき

例題 4.

$$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_n \text{ が基底} \iff P = [p_{ij}] \text{ が正則行列}$$

例題 4 ――― 基底と成分

$\boldsymbol{R}^3$ において

(a)　$\boldsymbol{a}_1 = (-1, -1, 0), \boldsymbol{a}_2 = (-1, 0, 1), \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -1)$ は基底をなすことを示せ．

(b)　$\boldsymbol{a} = (-5, -2, 1)$ の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する成分を求めよ．

解答　(a)　右の表から rank $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = 3$ だから $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立．よって基底である．

(b)　$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ として

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

を解けばよい．表から $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$ を得るから $\boldsymbol{a}$ の $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する成分は

$$\boldsymbol{a} = (3, 2, 1)_{\mathcal{B}}$$

である．

または

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

から求めてもよい．

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}$
−1	−1	0	−5
−1	0	1	−2
0	1	−1	1
1	1	0	5
0	1	1	3
0	1	−1	1
1	1	0	5
0	1	1	3
0	0	−2	−2
1	0	−1	2
0	1	1	3
0	0	1	1
1	0	0	3
0	1	0	2
0	0	1	1

問　題

4.1　$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ の

基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ に関する成分を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$

基底 $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_n\}$ に関する成分を $(y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}'}$

とすると前頁の P を用いて

$${}^t[x_1\, x_2 \cdots x_n] = P\, {}^t[y_1\, y_2 \ldots y_n]$$

が成り立つことを示せ (これを変換の式，P を変換の行列という)．

4.2　$\boldsymbol{R}^2$ の 2 組の基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1 = (2, -1), \boldsymbol{a}_2 = (1, -1)\}$ および $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{a}'_1 = (1, -2), \boldsymbol{a}'_2 = (-1, 3)\}$ の変換の行列を求めよ．

6.2 像と核

◎像と核◎

f を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像とする．

像　$\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$ は $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間でこれを像（空間）という．f の表現行列を $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ するとき

$$\mathrm{Im}\, f = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{で生成される部分空間})$$

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$$

$$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{rank}\, [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n] = \mathrm{rank}\, [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{y}]$$

である．一般に，V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とすると V の像

$$f(V) = \{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x} \in V\}$$

は $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間である．

全射　$\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{R}^m$ のとき，線形写像 f は全射であるという．このとき

$$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m \implies f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \text{ が存在する．}$$

$$f \text{ が全射} \iff \mathrm{rank}\, A = m$$

核　$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であってこれを核（空間）という．このとき

See p.48

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x}; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} : \text{同次連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{ の解空間}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - \mathrm{rank}\, A$$

See p.48

である．一般に，W を $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間とすると，W の逆像

$$f^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \in W\}$$

も $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である．

単射　$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき f を単射であるという．このとき

$$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) \implies \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$$

$$f \text{ が単射} \iff \mathrm{rank}\, A = n$$

次元定理　$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = n$

◎線形写像と 1 次独立性◎　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ が 1 次独立でも $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k)$ は 1 次独立とは限らないから，線形写像 f は 1 次独立性を保持しないが，

$$f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) : 1\text{ 次独立} \implies \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k : 1\text{ 次独立}$$

が成り立つ．

とくに，f が単射ならば 1 次独立性は保持される，すなわち

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k : 1\text{ 次独立} \implies f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) : 1\text{ 次独立}$$

Null

例題 4　　　　　**像と核**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき f の $\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

解答　右の表から $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, A = 2$. $\mathrm{Im}\, f$ は A の 4 個の列ベクトルで生成されるから，このうちの 2 個の 1 次独立なベクトルが $\mathrm{Im}\, f$ の基底である．たとえば表から A の第 1 列と第 2 列は 1 次独立だから $\mathrm{Im}\, f$ の 1 組の基底として $(1, -1, 2), (0, 1, 1)$ を採ることができる．

A			
1	0	−1	−2
−1	1	2	3
2	1	−1	−3
1	0	−1	−2
0	1	1	1
0	1	1	1
1	0	−1	−2
0	1	1	1
0	0	0	0

$\mathrm{Ker}\, f$ は同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間だから，表から次元は $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - \mathrm{rank}\, A = 4 - 2 = 2$ であり，解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから $(1, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の 1 組の基底である．

See. P.52

See. P.24, 25
22,

問　題

4.1　つぎの行列を表現行列としてもつ線形写像 f の像空間および核空間を求めよ．

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4.2　$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき，ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 1, 7)$ に対し，$\boldsymbol{a}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\}$ および $\boldsymbol{b}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$ を求めよ．

を得る。したがって，$3^{2x}=5$，$2x=\log_3 5$，$x=\dfrac{\log_3 5}{2}$ となる。

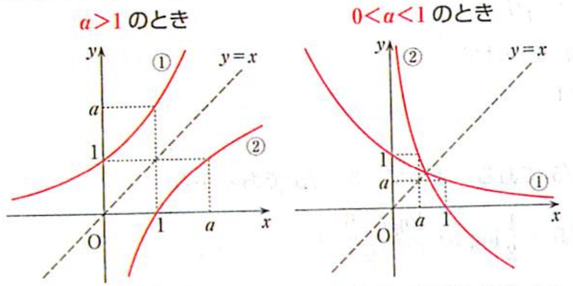
解説

(1)　真数はつねに正である。このことを真数条件という。

ポイント　指数関数と対数関数のグラフ

①指数関数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）のグラフ

②対数関数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）のグラフ



①，②ともに単調に増加する　①，②ともに単調に減少する

・①と②は直線 $y=x$ に関して対称である。

・①の定義域は実数全体，②の定義域は $x>0$ である。

(2)　対数の計算では，次の性質が使われている。

ポイント　対数の性質

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ とする。

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^k=k\log_a M \quad (k \text{ は実数})$$

(3)　〔解答〕〔別解〕ともに，y と q を消去して，上の対数の性質を用いて，$\log_3 A=\log_3 B$ の形に変形し，方程式 $A=B$ を解くことで x を求めている。〔解答〕では $3^x=t$ とおいたが，〔別解〕のように $3^{2x}=u$ とする方が少し計算が簡単である。

2020級
センター試験 過去問
(数学社)　数IA/IIB

第2問　標準　《関数の増減，接線，面積》

$f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ について考える。

(1)　$f'(x)=\boxed{3}x^2-\boxed{10}x+\boxed{3}$

$=(3x-1)(x-3)$

より，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ で極大値，

$x=\boxed{3}$ で極小値をとる。

$f(0)=-4$

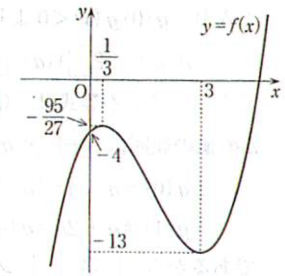
$f(3)=27-45+9-4=-13$

であるから，$x\geqq0$ の範囲における $f(x)$ の最小値は $\boxed{-13}$ である。

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{5}{9}+1-4=\frac{1}{27}-\frac{32}{9}=-\frac{95}{27}$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

このグラフと x 軸の異なる共有点の個数は1個であるから，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は $\boxed{1}$ 個である。



(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線 l の方程式は

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=-4$，$f'(0)=3$ であるから

$l：y=\boxed{3}x-\boxed{4}$

である。

放物線 $C：y=x^2+px+q$ は点 $(a,\ 3a-4)$ で l と接しているから，次の(i)，(ii)が成り立つ。

(i)　C は点 $(a,\ 3a-4)$ を通る。

(ii)　C の点 $(a,\ 3a-4)$ における接線の傾きは l の傾き3に等しい。

(i)より

$3a-4=a^2+pa+q$　……①

(ii)より

$2a+p=3$　……②　（$\because$　$y'=2x+p$）

よって，②より　$p=3-2a$

これを用いると，①より

$$q=3a-4-a^2-pa=3a-4-a^2-(3-2a)a$$
$$=a^2-4$$

となる。したがって，p，q は，a を用いて

$$p=\boxed{-2}a+\boxed{3},\quad q=a^{\boxed{2}}-\boxed{4}$$

と表される。

(3)　(2)の放物線 $C: y=g(x)=x^2+px+q$ は，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲では，x 軸とただ1点 $(\beta,\ 0)$ で交わり，$0<\beta<1$ であるから，$g(0)g(1)<0$ が成り立つ。

$$g(0)=q=a^2-4$$
$$g(1)=1+p+q=1+(-2a+3)+(a^2-4)=a^2-2a$$

より

$$g(0)g(1)=(a^2-4)(a^2-2a)$$
$$=(a+2)(a-2)a(a-2)$$
$$=a(a+2)(a-2)^2$$

となり，$g(0)g(1)<0$ より

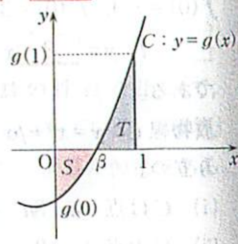
$$a(a+\boxed{2})(a-\boxed{2})^2<0$$

である。この不等式は，$(a-2)^2\geqq 0$ であるから，$a(a+2)<0$ かつ $a\neq 2$ と同値で，a の値の範囲は $\boxed{-2}<a<\boxed{0}$ である。したがって

$$g(0)=a^2-4=(a+2)(a-2)<0$$
$$g(1)=a^2-2a=a(a-2)>0$$

であるから，$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ に当てはまるものは順に $\boxed{⓪}$，$\boxed{②}$ である。

放物線 C の $0\leqq x\leqq\beta$ の部分と，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積が S，C の $\beta\leqq x\leqq 1$ の部分と，x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積が T であるから



$$S=\int_0^\beta\{-g(x)\}dx=-\int_0^\beta g(x)\,dx$$

$$T=\int_\beta^1 g(x)\,dx$$

と表される。これらの等式を利用すると

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^\beta g(x)\,dx+\int_\beta^1 g(x)\,dx=(-S)+T=T-S$$

が成り立つ。したがって，$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものは $\boxed{⑤}$ である。

$S=T$ すなわち $T-S=0$ となる a の値を求めるには，$p=-2a+3$，$q=a^2-4$ を用いて，$-2<a<0$ において $\int_0^1 g(x)\,dx=0$ を満たす a を求めればよい。

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1(x^2+px+q)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{p}{2}x^2+qx\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{p}{2}+q=0$$

より

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(-2a+3)+a^2-4=0$$
$$6a^2-6a-13=0$$
$$\therefore\quad a=\frac{3\pm\sqrt{9+78}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{87}}{6}$$

$-2<a<0$ なので，$a=\dfrac{3+\sqrt{87}}{6}$ は不適であり，求める a の値は

$$a=\frac{\boxed{3}-\sqrt{\boxed{87}}}{\boxed{6}}$$

である。

別解　(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ -4)$ における接線 l の傾きを m とする（l は y 軸に平行となることはない）と，l の方程式は $y=mx-4$ と表せる。$y=f(x)$ と $y=mx-4$ は点 $(0,\ -4)$ で接するので，方程式

$$x^3-5x^2+3x-4=mx-4$$

すなわち　$x(x^2-5x+3-m)=0$

は $x=0$ を重解にもつ。ゆえに，$x^2-5x+3-m=0$ は $x=0$ を解にもつので，$m=3$ である。したがって，l の方程式は，$y=3x-4$ である。

また，放物線 $C: y=x^2+px+q$ が点 $(a,\ 3a-4)$ で $l: y=3x-4$ と接しているとき，方程式

$$x^2+px+q=3x-4$$

すなわち　$x^2+(p-3)x+q+4=0$

は $x=a$ を重解にもつ。したがって，x の恒等式

$$x^2+(p-3)x+q+4=(x-a)^2$$

が成り立ち，左辺と右辺 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ の係数を比較すると

$$p-3=-2a,\quad q+4=a^2$$

となる。よって，$p=-2a+3$，$q=a^2-4$ である。

解説

(1)　$y=f(x)$ のグラフを描くことができればすべての設問に答えることができる。基本的な問題である。

(2)　接線の方程式については次のことが基本である。

ポイント 接線の方程式
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

このことを用いずに，〔別解〕のように考える方法もある。

なお，後半は，$y=x^2+px+q$ 上の点 $(a,\ a^2+pa+q)$ における接線が $y=3x-4$ であると考えてもよい。

$y=x^2+px+q$ 上の点 $(a,\ a^2+pa+q)$ における接線の方程式は $y'=2x+p$ より

$$y-(a^2+pa+q)=(2a+p)(x-a)$$

すなわち　$y=(2a+p)x-a^2+q$

これが $y=3x-4$ を表すので，$2a+p=3$，$-a^2+q=-4$ となる。

(3)　(2)の放物線 C とは，$y=x^2+px+q=x^2+(-2a+3)x+(a^2-4)$ のことである。

これを改めて $g(x)$ とおいているので注意する。$g(0)g(1)<0$ を解くことは，誘導があるので難しくないだろう。

後半では，$g(0)<0$，$g(1)>0$ となる図を描いてみることと，次のことが重要である。

ポイント 定積分の性質

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \quad (c\text{ は任意})$$

$a=\dfrac{3+\sqrt{87}}{6}$ は正であるから不適なのはすぐにわかる。$a=\dfrac{3-\sqrt{87}}{6}$ が $-2<a<0$ を満たすことは次のようにしてわかる。

$$81<87<100 \Longrightarrow 9<\sqrt{87}<10 \Longrightarrow -10<-\sqrt{87}<-9$$
$$\Longrightarrow 3-10<3-\sqrt{87}<3-9 \Longrightarrow -\frac{7}{6}<\frac{3-\sqrt{87}}{6}<-1$$
$$\Longrightarrow -2<\frac{3-\sqrt{87}}{6}<0$$

第3問 やや難 《隣接3項間の漸化式》

数列 $\{a_n\}$ は，次の(Ⅰ)，(Ⅱ)で定義される。

(Ⅰ)　$a_1=1$，$a_2=4$

(Ⅱ)　$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n=4n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……①

(1)　(Ⅱ)において，$n=1$ とし，(Ⅰ)を代入すると

$$2a_3-5a_2+2a_1=6 \qquad 2a_3-5\times4+2\times1=6$$

となるから，$a_3=\boxed{12}$ である。

(2)　①の左辺は

$$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n$$
$$=(n+1)a_{n+2}-(2n+2)a_{n+1}-na_{n+1}+2na_n$$
$$=(n+1)(a_{n+2}-\boxed{2}a_{n+1})-n(a_{n+1}-2a_n)$$

となる。よって，①は

$$(n+1)(a_{n+2}-2a_{n+1})-n(a_{n+1}-2a_n)=4n+2$$

と表される。したがって，$b_n=n(a_{n+1}-2a_n)$ とおくと

$$b_{n+1}-b_n=4n+2$$

数列 $\{4n+2\}$ は，6，10，14，18，… の等差数列となるから，$\{b_n\}$ の階差数列は，初項 $\boxed{6}$，公差 $\boxed{4}$ の等差数列である。

よって，$b_1=1\times(a_2-2a_1)=4-2\times1=2$ より，$\{b_n\}$ の一般項は，$n\geqq2$ のとき

$b_n=b_1+\{$初項6，公差4の等差数列の初項から第 $(n-1)$ 項までの和$\}$

$$=2+\frac{n-1}{2}\{2\times6+(n-2)\times4\}=2+(n-1)(2n+2)$$
$$=\boxed{2}n^{\boxed{2}}$$

である。これは $n=1$ としても成り立つ。ゆえに

$$n(a_{n+1}-2a_n)=2n^2$$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=\dfrac{1}{n}\cdot2n^2=2n$　……②

を得る。

$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，②から

$$c_{n+1}-2c_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n)$$
$$=(a_{n+2}-2a_{n+1})-(a_{n+1}-2a_n)$$
$$=2(n+1)-2n=\boxed{2}$$

である。この漸化式 $c_{n+1}-2c_n=2$ は