$$(Y\text{切片})=\frac{a}{2^{2a}}\leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad a\leqq 0$$

のとき，$X$ 切片の大きい方 $(\beta)$ は正となり，小さい方 $(\alpha)$ は0以下となる。

**解説**

(1) 指数関数 $X=2^x$ の定義域は実数全体であり，値域は正の数全体 $(X>0)$ である。グラフを理解し，記憶しておこう。

(2) 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ ……(＊) の判別式は $D=b^2-4ac$ である。
また，(＊)の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \quad \text{（2次方程式の解の公式）}$$

であるから，$D=0$ のとき，$x=\dfrac{-b}{2a}$ （重解）である。重解の公式として覚えておこう。

(3) (＊)の解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，解と係数の関係は

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{ac}{a^2} \quad (a^2>0)$$

であるから，$\alpha\beta\leqq 0$ のとき $ac\leqq 0$ である。このとき

$$D=b^2-4ac\geqq 0$$

が自動的に成り立つ（②では $b\neq 0$ であるから，$D>0$ である）。つまり，〔解答〕での $a\leqq 0$ は $D>0$ となる条件 $a<\dfrac{1}{4}$ を当然満たしている。このことは，（注）のグラフの $Y$ 切片が0以下のとき，頂点の $Y$ 座標 $-\dfrac{1-4a}{4\times 2^{2a}}$ が自動的に負になっている $\left(a<\dfrac{1}{4}\right)$ ことに対応している。

②を解の公式を用いて解くと $\beta$ が求まるが，$2^x=\beta \Longleftrightarrow x=\log_2\beta$ であるから，次の性質が使えるように，$\beta$ は積の形にしておかなければならない。

> **ポイント** 対数の性質
>
> $\log_a MN=\log_a M+\log_a N \quad (M>0,\ N>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

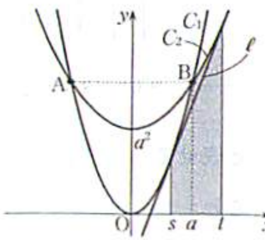


## 第2問 標準 《接線，面積，極値，関数の決定》

$C_1 : y=3x^2$ ……①

$C_2 : y=2x^2+a^2 \quad (a>0)$ ……②

のグラフ，$C_1$ と $C_2$ の共有点A，B，共通接線 $\ell$ は右図のようになる。




(1) 共有点A，Bの $x$ 座標は，①，②より $y$ を消去した $x$ の2次方程式

$$3x^2=2x^2+a^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2=a^2$$

の解であるから，A，Bの $x$ 座標はそれぞれ $-a$，$a$ （$a>0$ より $-a<a$）である。よって，Bの座標を $a$ を用いて表すと $(\boxed{a},\ \boxed{3}a^{\boxed{2}})$ である。

$\ell$ は $x=s$ で $C_1$ と接するので，①より $y'=6x$ であることから，$\ell$ の方程式は

$$y-3s^2=6s(x-s)$$

すなわち $\quad y=\boxed{6}sx-\boxed{3}s^{\boxed{2}}$

と表せる。同様に，$\ell$ は $x=t$ で $C_2$ と接するので，②より $y'=4x$ であることから，$\ell$ の方程式は

$$y-(2t^2+a^2)=4t(x-t)$$

すなわち $\quad y=\boxed{4}tx-\boxed{2}t^2+a^2$

とも表せる。これらは一致しなければならないので

$$6s=4t \quad \text{かつ} \quad -3s^2=-2t^2+a^2$$

が成り立つ。

前者より $\quad t=\dfrac{3}{2}s$

これを後者に代入して，$s>0$ に注意すると

$$-3s^2=-2\left(\frac{3}{2}s\right)^2+a^2 \qquad \frac{3}{2}s^2=a^2$$

$$s^2=\frac{2}{3}a^2=\frac{6}{9}a^2 \quad (a>0)$$

$$\therefore \quad s=\sqrt{\frac{6}{9}a^2}=\frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}a$$

また $\quad t=\dfrac{3}{2}s=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{6}}{\boxed{2}}a$

である。

$C_1$ の $s \leqq x \leqq a$ の部分，$C_2$ の $a \leqq x \leqq t$ の部分，$x$ 軸，および 2 直線 $x=s$，$x=t$ で囲まれた図形（冒頭の図の網かけ部分）の面積 $S$ は

$$S=\int_s^a 3x^2dx+\int_a^t(2x^2+a^2)\,dx$$

$$=\Big[x^3\Big]_s^a+\Big[\frac{2}{3}x^3+a^2x\Big]_a^t$$

$$=(a^3-s^3)+\frac{2}{3}(t^3-a^3)+a^2(t-a)$$

と表せる。ここに，$s^3=\frac{6\sqrt{6}}{27}a^3=\frac{2\sqrt{6}}{9}a^3$，$t^3=\frac{6\sqrt{6}}{8}a^3=\frac{3\sqrt{6}}{4}a^3$，$t=\frac{\sqrt{6}}{2}a$ を代入すると

$$S=\left(1-\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)a^3+\frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}-1\right)a^3+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)a^3$$

$$=\left(\frac{9-2\sqrt{6}}{9}+\frac{3\sqrt{6}-4}{6}+\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)a^3$$

$$=\frac{18-4\sqrt{6}+9\sqrt{6}-12+9\sqrt{6}-18}{18}a^3=\frac{14\sqrt{6}-12}{18}a^3$$

$$=\frac{\boxed{7}\sqrt{\boxed{6}}-\boxed{6}}{\boxed{9}}a^{\boxed{3}}$$

である。

(2)　$f(x)=x^3+px^2+qx+r$　（$p$，$q$，$r$ は実数）

$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f(x)$ は $x=-4$ で極値をとるから $f'(-4)=0$ である。

$f'(-4)=48-8p+q=0$　……③

$y=f(x)$ は $\mathrm{A}(-a,\ 3a^2)$，$\mathrm{B}(a,\ 3a^2)$ および原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$f(-a)=-a^3+pa^2-qa+r=3a^2$　……④

$f(a)=a^3+pa^2+qa+r=3a^2$　……⑤

$f(0)=r=0$　……⑥

が成り立つ。④+⑤と⑥より

$2pa^2=6a^2$　　$2a^2(p-3)=0$

$a\neq 0$ より　$p=\boxed{3}$

これを③に代入して

$q=8p-48=8\times 3-48=\boxed{-24}$

また，⑥より　$r=\boxed{0}$



したがって

$f(x)=x^3+3x^2-24x$

$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x^2+2x-8)=3(x-2)(x+4)$

より，$f(x)$ の増減表は右のようになる。ゆえに，$f(x)$ の極小値は

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ |

$f(2)=8+12-48=\boxed{-28}$

である。

また，⑤−④より　$2a^3+2qa=0$

これと $q=-24$ より

$a^3-24a=0$

$a(a^2-24)=0$

$a>0$ より　$a=\sqrt{24}=\boxed{2}\sqrt{\boxed{6}}$

である。

$y=f(x)=x^3+3x^2-24x$ と $C_2$：$y=2x^2+24$ の共有点の $x$ 座標は

$x^3+3x^2-24x=2x^2+24$

の解であるから

$x^3+x^2-24x-24=0$　　$x^2(x+1)-24(x+1)=0$

$(x+1)(x^2-24)=0$

∴　$x=-1,\ \pm 2\sqrt{6}$　$(=\pm a)$

となる。よって，$y=f(x)$ と $C_2$ の共有点のうち，A，B と異なる点の座標は，$f(-1)=-1+3+24=26$ より

$(\boxed{-1},\ \boxed{26})$

である。

## 解説

(1)　接線の方程式については，次のことが基本である。

> **ポイント**　**接線の方程式**
>
> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
>
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\ell$ の方程式は，$y=6sx-3s^2$ と $y=4tx-2t^2+a^2$ の 2 通りに表されるが，これらは任意の $x=x_0$ に対して同じ値 $y=y_0$ をとる。$y_0$ を消去した式

$(6s-4t)x_0-(3s^2-2t^2+a^2)=0$

がすべての実数 $x_0$ に対して成り立たなければならないから