

4.3 高次偏導関数, テーラーの定理と2変数関数の極値

● **高次偏導関数** ● 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ はまた x, y の関数であるから, これらの偏導関数も考えられる. これらを $f(x, y)$ の2次偏導関数という. 2次偏導関数にはつぎの4つがある.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

これらをそれぞれ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

で表す. さらに3次, 4次... の偏導関数も考えられるが, 2次以上の偏導関数をまとめて高次偏導関数という.

2次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} は必ずしも一致しない (p. 76 の例題5 参照) が, つぎのことが成り立つ.

定理 11 (偏微分の順序変換) $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ が連続ならば,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

一般に高次偏導関数の連続性を仮定すれば, その偏微分の順序は問題にならない.

● **偏微分作用素** ● a, b が定数のとき, 関数に作用する偏微分作用素 $a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ を

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = a \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

と定義する.

いま, $z = f(x, y), x = a + ht, y = b + kt$ で, $f(x, y)$ が必要な回数だけ連続な偏導関数をもてば, p. 71 の定理9より

$$\frac{d}{dt} f(a + ht, b + kt) = hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt)$$

$$= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a + ht, b + kt)$$

.....

$$\frac{d^n}{dt^n} f(a + ht, b + kt) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + ht, b + kt)$$

● **テーラーの定理** ● 1変数の場合には, 高次導関数をもつ関数についてテーラーの定理が成り立った. 2変数の関数についても高次偏導関数をもつ関数についてつぎの定理が成り立つ.

定理 12 (テーラーの定理) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) を含む領域 D で n 次までの連続な偏導関数をもてば, $(a + h, b + k) \in D$ のとき,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

となる θ が存在する.

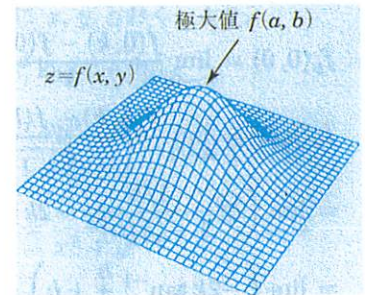
とくに $n = 1$ のときは,

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + \theta k) + kf_y(a + \theta h, b + \theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

となるが, これを2変数関数の平均値の定理という.

また上の定理で $(a, b) = (0, 0)$ とし, h, k の代りに x, y としたときは, マクローリンの定理という.

● **2変数関数の極値** ● $z = f(x, y)$ を点 (a, b) に近い点で考えたとき, 点 (a, b) と異なるすべての点 (x, y) に対して, $f(a, b) > f(x, y)$ ならば $f(x, y)$ は点 (a, b) で極大で $f(a, b)$ を極大値という. 極小値についても同様である. 極大値, 極小値をあわせて極値という.



偏微分可能な関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとれば $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ である. この関係を満足する点で $f(x, y)$ が極値をとるかどうかはつぎの定理を用いて判定する.

定理 13 (極値の判定) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において連続な2次偏導関数をもち, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ であるとする.

$$D = \{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$$

とおくとき, つぎのことが成り立つ.

- (i) $D < 0, f_{xx}(a, b) > 0$ ならば $f(a, b)$ は極小値
 $D < 0, f_{xx}(a, b) < 0$ ならば $f(a, b)$ は極大値
- (ii) $D > 0$ のときは $f(a, b)$ は極値でない.

6.2 像と核

●像と核●

f を \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像とする.

像 $\text{Im } f = \{f(x); x \in \mathbb{R}^n\}$ は \mathbb{R}^m の部分空間でこれを像(空間)という. f の表現行列を $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ とするとき

$$\Rightarrow \text{Im } f = L\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ で生成される部分空間})$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im } f) = \text{rank } A = \text{rank } [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

$$y \in \text{Im } f \iff \text{rank } [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ y] = \text{rank } [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

である. 一般に, V を \mathbb{R}^n の部分空間とすると V の像

$$f(V) = \{f(x); x \in V\}$$

は \mathbb{R}^m の部分空間である.

全射 $\text{Im } f = \mathbb{R}^m$ のとき, 線形写像 f は全射であるという. このとき

$$y \in \mathbb{R}^m \implies f(x) = y \text{ となる } x \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する.}$$

$$f \text{ が全射} \iff \text{rank } A = m$$

核 $\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}$ は \mathbb{R}^n の部分空間であってこれを核(空間)という. このとき

$\text{Ker } f = \{x; Ax = 0\}$: 同次連立1次方程式 $Ax=0$ の解空間

$$\dim(\text{Ker } f) = n - \text{rank } A$$

である. 一般に, W を \mathbb{R}^m の部分空間とすると, W の逆像

$$f^{-1}(W) = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \in W\}$$

も \mathbb{R}^n の部分空間である.

単射 $\text{Ker } f = \{0\}$ のとき f を単射であるという. このとき

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

$$f \text{ が単射} \iff \text{rank } A = n$$

次元定理 $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = n$

●線形写像と1次独立性● $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ が1次独立でも $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ は1次独立とは限らないから, 線形写像 f は1次独立性を保持しないが,

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k) : 1 \text{ 次独立} \implies x_1, x_2, \dots, x_k : 1 \text{ 次独立}$$

が成り立つ.

とくに, f が単射ならば1次独立性は保持される, すなわち

$$x_1, x_2, \dots, x_k : 1 \text{ 次独立} \implies f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k) : 1 \text{ 次独立}$$

テキスト
テキスト

例題4

像と核

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ とする. \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^3 への線形写像 f を $f(x) = Ax$ で与えるとき f の $\text{Im } f$ および $\text{Ker } f$ の次元と1組の基底を求めよ.

解答 右の表から $\dim(\text{Im } f) = \text{rank } A = 2$. $\text{Im } f$ は A の4個の列ベクトルで生成されるから, このうちの2個の1次独立なベクトルが $\text{Im } f$ の基底である. たとえば表から A の第1列と第2列は1次独立だから $\text{Im } f$ の1組の基底として $(1, -1, 2), (0, 1, 1)$ を採ることができる.

$\text{Ker } f$ は同次連立1次方程式 $Ax = 0$ の解空間だから, 表から次元は $\dim(\text{Ker } f) = 4 - \text{rank } A = 4 - 2 = 2$ であり, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから $(1, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)$ が $\text{Ker } f$ の1組の基底である.

A			
1	0	-1	-2
-1	1	2	3
2	1	-1	-3
1	0	-1	-2
0	1	1	1
0	1	1	1
1	0	-1	-2
0	1	1	1
0	0	0	0

See. P.52

see. p.24, 25
^
22,

問題

4.1 つぎの行列を表現行列としてもつ線形写像 f の像空間および核空間を求めよ.

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ とする. \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^3 への線形写像を $f(x) = Ax$

で与えるとき, ベクトル $a = (1, -1, 1), b = (-2, 1, 7)$ に対し, a の逆像 $\{x \in \mathbb{R}^4; f(x) = a\}$ および b の逆像 $\{x \in \mathbb{R}^4; f(x) = b\}$ を求めよ.

例題 8

対角化

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が対角化可能ならば変換の行列を求めて対角化せよ。

解答 A の固有多項式は

$$\varphi(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(3-t)$$

だから、固有値は 1, 3 で代数的重複度はそれぞれ 2, 1 である。

右表から $\text{rank}(A - E) = 1$ だから固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ の次元 (幾何的重複度) は $\dim V(1) = 3 - \text{rank}(A - E) = 3 - 1 = 2$ で代数的重複度に一致する。

固有値 3 に関しては代数的重複度は 1 だから固有空間 $V(3)$ の次元も 1 である。各固有値に対して幾何的重複度と代数的重複度が一致するから A は対角化可能である。

固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ は表から

$$V(1) = L\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}, \quad \mathbf{x}_1 = {}^t[-1 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{x}_2 = {}^t[-1 \ 0 \ 1]$$

で $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が $V(1)$ の 1 組の基底である。

固有値 3 に対する固有空間 $V(3)$ に関しても表から

$$V(3) = L\{\mathbf{x}_3\}, \quad \mathbf{x}_3 = {}^t[1 \ 1 \ 0]$$

で \mathbf{x}_3 が $V(3)$ の基底である。 P.78

よって、 $P = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3]$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる。

注意 $\mathbb{R}^3 = V(1) \oplus V(3)$ である。

問題

8.1 つぎの行列 A が対角化可能ならば対角化せよ。

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

15-2
2

例題 9

べき零行列の対角化

A がべき零行列で、 $A \neq O$ とすると、 A は対角化可能でないことを示せ。

解答 A が対角化可能であるとすると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

となる正則行列 P が存在する。 A がべき零行列だから $A^k = O$ として、上式を k 乗すると

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

一方

$$(P^{-1}AP)^k = \overbrace{P^{-1}AP P^{-1}AP P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}^{k \text{ 個}} = P^{-1}A^k P = P^{-1}O P = O$$

だから

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

よって、

$$A = POP^{-1} = O$$

であるがこれは仮定に反する。

問題

9.1 $A^2 = A$ ならば対角化可能で、 $\text{tr } A = \text{rank } A$ であることを示せ。

9.2 (a) n 次正方行列 A が相異なる n 個の正の固有値をもつとする。このとき、 $B^2 = A$ となる正方行列 B が存在することを示せ。

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ に対し $B^2 = A$ となる B を求めよ。

2017年版

センター試験

過去問研究

教員 I-A/II-B

第2問

標準

《微分係数の定義, 接線, 面積, 最小値》

(教学社)

(1) x が a から $a+h$ ($h \neq 0$) まで変化するときの $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2}(a+h)^2 - \frac{1}{2}a^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2h} (2ah + h^2) = \boxed{a} + \frac{h}{\boxed{2}} \end{aligned}$$

であるから, 微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a + \frac{h}{2} \right) = \boxed{a}$$

(2) 放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ ($a > 0$) における C の接線 ℓ の方程式は $y - \frac{1}{2}a^2 = f'(a)(x - a)$ とかけるから, (1)より

$$\ell: y = a(x - a) + \frac{1}{2}a^2 = \boxed{a}x - \frac{1}{\boxed{2}}a^2$$

である。直線 ℓ と x 軸との交点 Q の x 座標は, ℓ の方程式で $y=0$ とおくと, $ax = \frac{1}{2}a^2$ ($a \neq 0$) より $x = \frac{1}{2}a$ であるから, Q の座標は

$$Q\left(\frac{\boxed{a}}{\boxed{2}}, 0\right)$$

である。点 Q を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は, m の傾きが $-\frac{1}{a}$ (ℓ の傾きが a で $a \neq 0$ より) であることより, $y - 0 = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)$ とかけるから

$$m: y = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{a}}x + \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

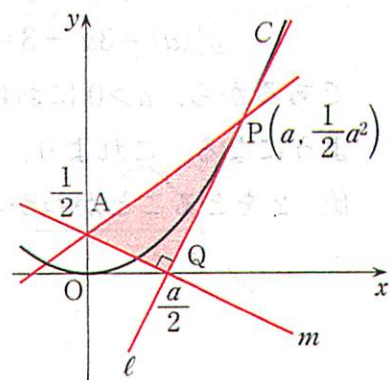
である。直線 m と y 軸との交点 A の座標は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

であるから

$$AQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 1)$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 1}$$

また



$$PQ^2 = \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - 0\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{4}(a^2 + 1)$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 1}$$

$\angle AQP = 90^\circ$ であるので、三角形 APQ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times AQ \times PQ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 1} \times \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 1} = \frac{a(a^2 + 1)}{8}$$

となる。直線 AP の方程式は、 $a \neq 0$ より

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}}{a - 0}(x - 0) \quad \text{よって} \quad y = \frac{a^2 - 1}{2a}x + \frac{1}{2}$$

であるから、 y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \left(\frac{a^2 - 1}{2a}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[\frac{a^2 - 1}{4a}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{a^2 - 1}{4a}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{4}a(a^2 - 1) + \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}a^3 \\ &= \frac{1}{12}a^3 + \frac{1}{4}a = \frac{a(a^2 + 3)}{12} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S - T &= \frac{a(a^2 + 1)}{8} - \frac{a(a^2 + 3)}{12} = \frac{a}{24} \{ 3(a^2 + 1) - 2(a^2 + 3) \} \\ &= \frac{a(a^2 - 3)}{24} \end{aligned}$$

である。 $S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は、 $a > 0$ であることより

$$a^2 - 3 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a < -\sqrt{3}, \quad \sqrt{3} < a$$

であるが、 $a > 0$ より、 $a > \sqrt{3}$ である。

$g(a) = a(a^2 - 3) = a^3 - 3a$ とおくと、 $S - T = \frac{g(a)}{24}$ である。

$$g'(a) = 3a^2 - 3 = 3(a + 1)(a - 1)$$

であるから、 $a > 0$ における $g(a)$ の増減は右表のようになる。これより、 $g(a)$ は、 $a = 1$ のとき最小値 -2 をとることがわかる。したがって、 $S - T$ は

a	0	...	1	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		↘	-2	↗

$$a = \boxed{1} \text{ で最小値 } \frac{-2}{24} = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{12}}$$

をとることがわかる。

解説

- (1) 微分係数や導関数の定義式は忘れてはならない。

ポイント 微分係数の定義式

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

と定義される。 a を x で置き換えれば導関数である。

- (2) 接線の方程式は必出である。

ポイント 接線の方程式

関数 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- 三角形 APQ の面積 S は、台形 OAPR の面積 (R の座標は $(a, 0)$) から、2 つの三角形 OAQ, PQR の面積を引いて求めてもよい。

$$S = (\text{台形OAPRの面積}) - (\triangle OAQ\text{の面積}) - (\triangle PQR\text{の面積})$$

$$= \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a - \frac{1}{8}a - \frac{1}{8}a^3 = \frac{a(a^2+1)}{8}$$

この方法によると、面積 T の方は、次のように簡単に計算できる。

$$T = (\text{台形OAPRの面積}) - \int_0^a \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{4}a(a^2+1) - \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4}a(a^2+1) - \frac{1}{6}a^3 = \frac{a(a^2+3)}{12}$$

- $S-T$ は a の 3 次関数であるから、不等式 $S-T > 0$ は 3 次不等式になるが、 $a > 0$ であるから、2 次不等式 $a^2 - 3 > 0$ を解けばよい。

$S-T$ の増減は 3 次関数の増減になるから、微分法を用いる。

$S-T$ のグラフは右図のようになる。この図から $a > 0$ で、 $S-T > 0$ となる a の範囲は $a > \sqrt{3}$ であることがわかる。

