v.19.1 2019/06/14 実施

情報科学科　数式処理演習 ペア　試験問題

以下の問題を python を用いてペアで解き，出力して提出せよ．60 点以下でグループ解散．

[1] (1) (偏微分，saddle point) 関数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ の 2 次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよ．また，$(x,y) = (0,0)$ での判別式

$$D = f_{xy}(0,0)^2 - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) > 0$$

を確かめよ．さらに，関数 $f(x,y)$ を plot3d して鞍点 (saddle point) の意味を確認せよ．(15 点)

(2) (フーリエ積分) 関数 $f(x) = \sin(x)\sin(2x)$ の不定積分を求めよ．$f(x)$ を $x = -\pi..\pi$ でプロットし，この区間での積分値を求めよ．結果についてコメントせよ．(15 点)

[2] (1) (ヌルスペース) 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ を表現行列とする $R^4 \to R^2$ の線形写像 f の $\mathrm{Ker}(f)$ の 1 組の基底を求めよ．(15 点)

(2) (対角化) 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．また，対角化行列 P を求めて，$P^{-1}AP$ と P^tAP を求め，違いを確かめよ．(15 点)

[3] (2015 年度大学入試センター試験 本試験 数学 II・B 第 2 問)

以下のセンター試験問題を python で code 化せよ．ただし，関数 $f(x)$ は

```
f =Rational(1,2)*x**2
f.subs({x:a})
```

などとするべし．

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう．h が 0 でないとき，x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である．したがって，求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \to \boxed{\text{ウ}}} \left(\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}} \right) = \boxed{\text{エ}}$$

である．

(2) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ を C とし，C 上に点 $\mathrm{P}\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ をとる．ただし，$a>0$ とする．点 P における C の接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{オ}}\,x-\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$$

である．直線 l と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, 0\right)$ である．点 Q を通り l に垂直な直線を m とすると，m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である．

(3) 直線 m と y 軸との交点を A とする．三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S=\frac{a\left(a^2+\boxed{\text{セ}}\right)}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる．また，y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T=\frac{a\left(a^2+\boxed{\text{タ}}\right)}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる．

$a>0$ の範囲における $S-T$ の値について調べよう．

$$S-T=\frac{a\left(a^2-\boxed{\text{テ}}\right)}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である．$a>0$ であるから，$S-T>0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a>\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である．また，$a>0$ のときの $S-T$ の増減を調べると，$S-T$ は $a=\boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる．

(10 点)

[4] 前問の関数を $f(x)=0.49x^2$ および放物線 C の方程式を $y=0.49x^2$ として問題を解け．数値解となるので，答えはかっこによらず小数点となる．最後の最小値は-0.08676940 ぐらい．(30 点)