数値計算試験問題

2021/12/17 実施

2022/12/16 予行演習実施

cc by Shigeto R. Nishitani 2021-2

2022/12/16 予行演習:以下の問いに答えよ．答案はpdfとipynb形式でLUNAのd12へ全員が個別に提出せよ．pdfは2pageを一枚に集約して作成すること．

1 簡単な行列計算(25点)

次のデータにフィットした二次関数を求める．

```
import numpy as np

xdata = np.array([1,2,3,4])
ydata = np.array([1,2,5,11])
```

最小二乗法の正規方程式(normal equations)から求められるデザイン行列Aは， $$ A=\left(\begin {array}{ccc} 1. & 1. & 1.\

1. & 2. & 4. \
2. & 3. & 9. \
3. & 4. & 16. \end {array} \right) $$ となる．A^TAの逆行列から

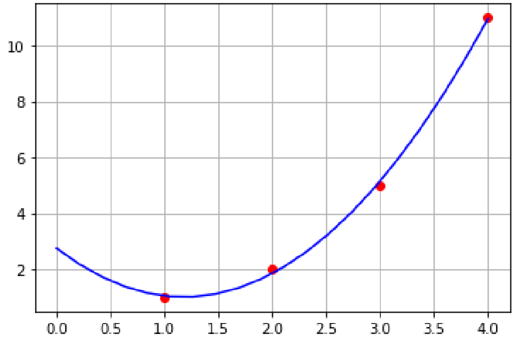
$$a = (A^TA)^{-1}A^Ty$$

により最適パラメータaを求め，データと同時に plot せよ．

In [1]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pprint import pprint
import scipy.linalg as linalg

xdata=np.array([1,2,3,4])
ydata=np.array([1,2,5,11])

def f(x, a0, a1, a2):
   return a0 + a1*x + a2*x**2

def ff(x,i):
   return x**i

Av = np.zeros([4,3])
for i in range(0,3):
   for j in range(0,4):
      Av[j][i]=ff(xdata[j],i)


print(Av)
Ai = linalg.inv(np.dot(np.transpose(Av),Av))
b = np.dot(np.transpose(Av),ydata)
params = np.dot(Ai,b)
print(params)
plt.plot(xdata,ydata, 'o', color='r')

x =np.linspace(0,4,20)
y = f(x,params[0],params[1],params[2])
plt.plot(x,y, color='b')

plt.grid()
plt.show()
```

```
/Users/bob/opt/anaconda3/lib/python3.8/site-packages/scipy/__init__.py:146: UserWarning: A NumPy version >=1.16.5 and <1.23.0 is required for this version of SciPy (detected version 1.23.4
  warnings.warn(f"A NumPy version >={np_minversion} and <{np_maxversion}"
[[ 1.  1.  1.]
 [ 1.  2.  4.]
 [ 1.  3.  9.]
 [ 1.  4. 16.]]
[ 2.75 -2.95  1.25]
```



2 ニュートンの差分商補間(25点)

2を底とする対数関数($\log[2](x)$)の$x=2$における値$F(2.0)$をニュートンの差分商補間を用いて求める．ニュートンの内挿公式は，

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + (x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor + (x-x_0)(x-x_1)f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor + \\ &\cdots + \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\, f_n\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_n\rfloor \end{aligned}$$

である．ここで$f_i\lfloor\ \rfloor$は次のような関数を意味していて，

$$\begin{aligned} f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor &= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \\ f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor &= \frac{f_1\lfloor x_1,x_2\rfloor - f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor}{x_2-x_0} \\ &\vdots \\ f_n\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_n\rfloor &= \frac{f_{n-1}\lfloor x_1,x_2\cdots,x_n\rfloor - f_{n-1}\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rfloor}{x_n-x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる．$x_k=1.4, 1.8, 2.2, 2.6$をそれぞれ選ぶと，差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる．

k	x_k	$y_k=F_0(x_k)$	$f_1\lfloor x_k,x_{k+1}\rfloor$	$f_2\lfloor x_k,x_{k+1},x_{k+2}\rfloor$	$f_3\lfloor x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}\rfloor$
0	1.4	0.4854268272			
			0.906425198		
1	1.8	0.8479969066		$[XXX]$	
			0.723766544		0.0639712067
2	2.2	1.137503524		−0.1515578700	
			0.602520248		
3	2.6	1.378511623			

それぞれの項は，例えば，

$$f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor=\frac{0.8479969066-0.4854268272}{1.8-1.4}=0.906425198$$

で求められる．ニュートンの差分商の一次多項式の値はx=2.0で

$$\begin{aligned}F(x)&=F_0(1.4)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor &(1)\\&=0.4854268272+(2.0-1.4)\times 0.906425198 &(2)\\&=1.029281946 &(3)\end{aligned}$$

となる．

(1) 差分商補間の表中の開いている箇所[XXX]を埋めよ．

(2) ニュートンの二次多項式

$$F(x)=F(x_0)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor+(x-x_0)(x-x_1)f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor$$

の値を求めよ．

(3) ニュートンの三次多項式の値を求めよ．

(E.クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.31, 例4改)

In [2]:

```
print('(1)')
print((0.723766544 - 0.906425198)/(2.2-1.4))
print('(2)')
print(0.4854268272+(2.0-1.4)*0.906425198)
print(0.4854268272+(2.0-1.4)*0.906425198+(2-1.4)*(2-1.8)*(-0.2283233180))
print('(3)')
print(0.4854268272+(2.0-1.4)*0.906425198+(2-1.4)*(2-1.8)*(-0.2283233180)+(2-1.4)*(2
```

```
(1)
-0.22832331749999996
(2)
1.029281946
1.00188314784
(3)
1.0003478388792002
```

3 数値積分(25点)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad =\log 2$$

の近似値をシンプソンの公式で求めよ．区間を2,4,8,16等分して片対数プロットで収束の様子を示せ．
ただし$\log_e(2)=0.6931471805599453$である．

「大学教養数学」，児玉鹿三,技研社 1963, p.172.

In [3]:

```
import numpy as np
print(np.log(2))
```

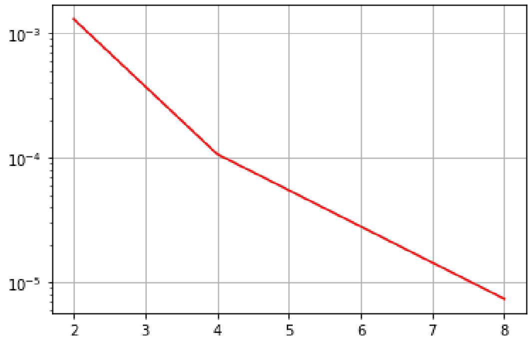
```
0.6931471805599453
```

In [4]:

```
def func(x):
    return 1.0/x

def simpson(N):
    x0, xn =1.0, 2.0

    M = int(N/2)
    h = (xn-x0)/N
    Seven, Sodd = 0.0, 0.0
    for i in range(1, 2*M, 2): #rangeの終わりに注意
        xi = x0 + i*h
        Sodd += func(xi)
#       print("{0}".format(i))
    for i in range(2, 2*M, 2):
        xi = x0 + i*h
        Seven += func(xi)
#       print("{0}".format(i))

    return h*(func(x0)+4*Sodd+2*Seven+func(xn))/3
```

In [5]:

```
x, y = [], []
for i in range(1,4):
    x.append(2**i)
    y.append(abs(simpson(2**i)-0.6931471805599453))
plt.plot(x, y, color = 'r')
plt.yscale('log')
plt.grid()
plt.show()
```

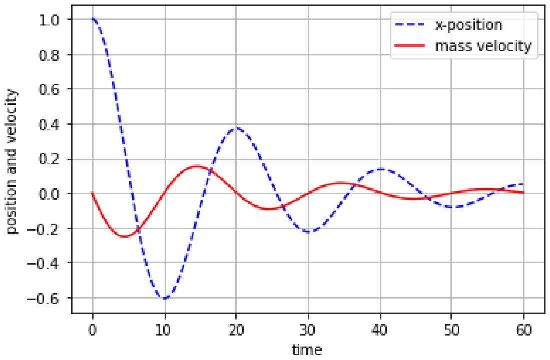


4 スムースな静止(25点)

バネと質点(mass)の運動において，地面から摩擦力(friction)が速度(velocity)に比例して働いているとする． 以下のコードに「速度に比例する時間に依存しない一定の摩擦項」を加えると，質点が減衰(damping)する様子が図の通り再現される．

1. friction=0.1でこの図を作成せよ．
2. さらに，質点が原点を超えることなくできるだけ早く減衰するにはfrictionはどの程度の値が最適か． 小数点以下一桁程度で答えよ（厳密に導かなくていいよ）．
3. 摩擦力と質点の振る舞いを定性的に解説せよ．

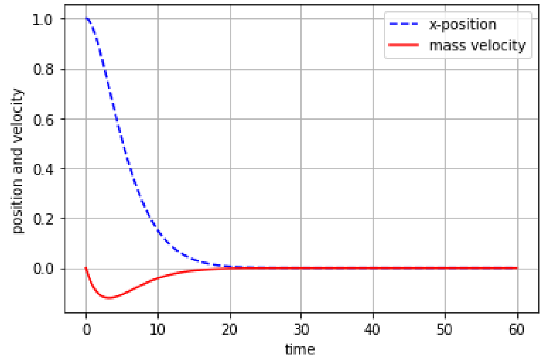
これは，ロボットアームなどの静止をダンパー制御するときの振る舞いとなる．




```
import matplotlib.pyplot as plt

def my_plot(xx, vv, tt):
    plt.plot(tt, xx, color = 'b', linestyle='--',label="x-position")
    plt.plot(tt, vv, color = 'r', label="mass velocity")
    plt.legend()
    plt.xlabel('time')
    plt.ylabel('position and velocity')
    plt.grid()
    plt.show()
def euler3(x0,v0):
  v1 = v0 +(- k * x0 ) * dt
  x1 = x0 + v0 * dt
  return [x1, v1]

friction = 0.1
t, dt, k=0.0, 0.01, 0.1
tt,xx,vv=[0.0],[1.0],[0.0]
for i in range(0,6000):
  t += dt
  x, v = euler3(xx[-1],vv[-1])
  tt.append(t)
  xx.append(x)
  vv.append(v)

my_plot(xx, vv, tt)
```

In [6]:

```
import matplotlib.pyplot as plt

def my_plot(xx, vv, tt):
    plt.plot(tt, xx, color = 'b', linestyle='--',label="x-position")
    plt.plot(tt, vv, color = 'r', label="mass velocity")
    plt.legend()
    plt.xlabel('time')
    plt.ylabel('position and velocity')
    plt.grid()
    plt.show()
def euler3(x0,v0):
  v1 = v0 +(- k * x0 - friction*v0) * dt
  x1 = x0 + v0 * dt
  return [x1, v1]

friction = 0.6
t, dt, k=0.0, 0.01, 0.1
tt,xx,vv=[0.0],[1.0],[0.0]
for i in range(0,6000):
  t += dt
  x, v = euler3(xx[-1],vv[-1])
  tt.append(t)
  xx.append(x)
  vv.append(v)

my_plot(xx, vv, tt)
```



In [ ]: