数値計算試験問題

2021/12/17 実施

2022/12/16 予行演習実施

cc by Shigeto R. Nishitani 2021-2

2022/12/16 予行演習:以下の問いに答えよ．答案はpdfとipynb形式でLUNAのd12へ全員が個別に提出せよ．pdfは2pageを一枚に集約して作成すること．

1 簡単な行列計算(25点)

次のデータにフィットした二次関数を求める．

```python
import numpy as np

xdata = np.array([1,2,3,4])
ydata = np.array([1,2,5,11])
```

最小二乗法の正規方程式(normal equations)から求められるデザイン行列Aは， $$ A=\left(\begin {array}{ccc} 1. & 1. & 1.\

1. & 2. & 4. \
2. & 3. & 9. \
3. & 4. & 16. \end {array} \right) $$ となる．A^TAの逆行列から

$$a = (A^TA)^{-1}A^Ty$$

により最適パラメータaを求め，データと同時に plot せよ．

2 ニュートンの差分商補間(25点)

2を底とする対数関数($\log[2](x)$)の$x=2$における値$F(2.0)$をニュートンの差分商補間を用いて求める． ニュートンの内挿公式は，

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor+(x-x_0)(x-x_1)f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor+ \\ &\cdots+\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\,f_n\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_n\rfloor \end{aligned}$$

である．ここで$f_i\lfloor\ \rfloor$ は次のような関数を意味していて，

$$\begin{aligned} f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor &= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \\ f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor &= \frac{f_1\lfloor x_1,x_2\rfloor-f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor}{x_2-x_0} \\ &\vdots \\ f_n\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_n\rfloor &= \frac{f_{n-1}\lfloor x_1,x_2\cdots,x_n\rfloor-f_{n-1}\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rfloor}{x_n-x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる．$x_k=1.4,1.8,2.2,2.6$をそれぞれ選ぶと，差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる．

k	x_k	$y_k=F_0(x_k)$	$f_1\lfloor x_k,x_{k+1}\rfloor$	$f_2\lfloor x_k,x_{k+1},x_{k+2}\rfloor$	$f_3\lfloor x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}\rfloor$
0	1.4	0.4854268272			
			0.906425198		
1	1.8	0.8479969066		$[XXX]$	
			0.723766544		0.0639712067
2	2.2	1.137503524		−0.1515578700	
			0.602520248		
3	2.6	1.378511623			

それぞれの項は，例えば，

$$f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor = \frac{0.8479969066-0.4854268272}{1.8-1.4} = 0.906425198$$

で求められる．ニュートンの差分商の一次多項式の値はx=2.0で

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(1.4)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor && (1) \\ &= 0.4854268272+(2.0-1.4)\times 0.906425198 && (2) \\ &= 1.029281946 && (3) \end{aligned}$$

となる．

(1) 差分商補間の表中の開いている箇所[XXX]を埋めよ．

(2) ニュートンの二次多項式

$$F(x)=F(x_0)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor+(x-x_0)(x-x_1)f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor$$

の値を求めよ．

(3) ニュートンの三次多項式の値を求めよ．

(E.クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.31, 例4改)

3 数値積分(25点)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad = \log 2$$

の近似値をシンプソンの公式で求めよ．区間を2,4,8,16等分して片対数プロットで収束の様子を示せ．ただし$\log_e(2)=0.6931471805599453$である．

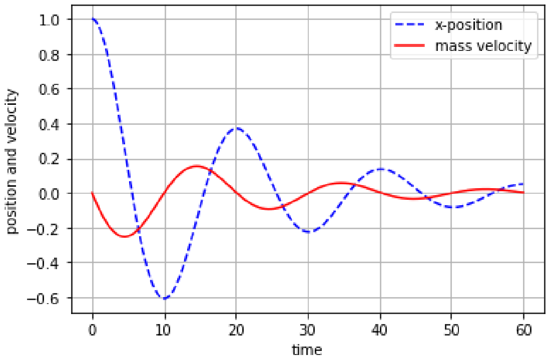
「大学教養数学」，児玉鹿三,技研社 1963, p.172.

4 スムースな静止(25点)

バネと質点(mass)の運動において，地面から摩擦力(friction)が速度(velocity)に比例して働いているとする． 以下のコードに「速度に比例する時間に依存しない一定の摩擦項」を加えると，質点が減衰(damping)する様子が図の通り再現される．

1. friction=0.1でこの図を作成せよ．
2. さらに，質点が原点を超えることなくできるだけ早く減衰するにはfrictionはどの程度の値が最適か． 小数点以下一桁程度で答えよ（厳密に導かなくていいよ）．
3. 摩擦力と質点の振る舞いを定性的に解説せよ．

これは，ロボットアームなどの静止をダンパー制御するときの振る舞いとなる．




```python
import matplotlib.pyplot as plt

def my_plot(xx, vv, tt):
    plt.plot(tt, xx, color = 'b', linestyle='--',label="x-position")
    plt.plot(tt, vv, color = 'r', label="mass velocity")
    plt.legend()
    plt.xlabel('time')
    plt.ylabel('position and velocity')
    plt.grid()
    plt.show()
def euler3(x0,v0):
  v1 = v0 +(- k * x0 ) * dt
  x1 = x0 + v0 * dt
  return [x1, v1]

friction = 0.1
t, dt, k=0.0, 0.01, 0.1
tt,xx,vv=[0.0],[1.0],[0.0]
for i in range(0,6000):
  t += dt
  x, v = euler3(xx[-1],vv[-1])
  tt.append(t)
  xx.append(x)
  vv.append(v)

my_plot(xx, vv, tt)
```