

数値計算試験問題

2023/07/12 実施

cc by Shigeto R. Nishitani 2023

1 簡単な行列計算:25点

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -4 & -5 & -7 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

また、固有ベクトルで構成される対角化行列 P を用いて、ドット演算により $P^{-1} \cdot A \cdot P$ が対角化されることを確かめよ。

```
In [1]: import numpy as np
np.set_printoptions(formatter={'float': '{: 0.3f}'.format})
```

```
aa = np.array([[4,5,5],[-4,-5,-7],[4,4,6]])
print(aa)
```

```
[[ 4  5  5]
 [-4 -5 -7]
 [ 4  4  6]]
```

```
In [2]: import scipy.linalg as linalg
l, PP = linalg.eig(aa)
print(l)
print(PP)
```

```
[ 4.+0.j  2.+0.j -1.+0.j]
[[-0.333  0.000 -0.707]
 [ 0.667  0.707  0.707]
 [-0.667 -0.707  0.000]]
```

```
In [3]: linalg.inv(PP).dot(aa).dot(PP)
```

```
Out[3]: array([[ 4.000,  0.000,  0.000],
 [ 0.000,  2.000, -0.000],
 [ 0.000,  0.000, -1.000]])
```

2 ニュートンの差分商補間:25点

三次関数 x^3 の $x = 0.75$ における値 $F(0.75)$ をニュートンの差分商補間を用いて求める。ニュートンの内挿公式は、

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2] + \dots + \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) f_n[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

である。ここで $f_i[\]$ は次のような関数を意味していて、

$$\begin{aligned} f_1[x_0, x_1] &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ f_2[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f_1[x_1, x_2] - f_1[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \\ f_n[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f_{n-1}[x_1, x_2, \dots, x_n] - f_{n-1}[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる。 $x_k = -1, 0, 1, 2$ をそれぞれ選ぶと、差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる。

k	x_k	$y_k = F_0(x_k)$	$f_1[x_k, x_{k+1}]$	$f_2[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f_3[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	-1.0	-1.0			
1	0.0	0.0	1.0	[XXX]	
2	1.0	1.0	1.0	3.0	1.0
3	2.0	8.0	7.0		

それぞれの項は、例えば、

$$f_1[x_0, x_1] = \frac{0.0 - (-1.0)}{0.0 - (-1.0)} = 1.0$$

で求められる。ニュートンの差分商の一次多項式の値は $x=0.75$ で

$$F(x) = F_0(-1.0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] \tag{1}$$

$$= 1.0 + (-0.75 - (-1.0)) \times (-1.0) \tag{2}$$

$$= 0.75 \tag{3}$$

となる。

(1) 差分商補間の表中の開いている箇所 [XXX] を埋めよ。

(2) ニュートンの二次多項式

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2]$$

の値を求めよ。

(3) ニュートンの三次多項式の値を求めよ。

(児玉鹿三著「理工系基礎数学解析-I」(槇書店, 1967), p.294)

```
In [4]: def func(x):
return x**3
```

```

x0,x1,x2,x3=-1.0,0.0,1.0,2.0
y0,y1,y2,y3=func(x0),func(x1),func(x2),func(x3)
print(y0,y1,y2,y3)
f1_12=(y2-y1)/(x2-x1)
f1_01=(y1-y0)/(x1-x0)
f1_23=(y3-y2)/(x3-x2)
print(f1_12,f1_01)
# (1) f2_012 = (f1_12-f1_01)/(x2-x0)
f2_012=(f1_12-f1_01)/(x2-x0)
print('f2_012:',f2_012)

# (2)
f0=y0
x=0.75
f2 = f0+(x-x0)*f1_01+(x-x0)*(x-x1)*f2_012
print('f2:',f2)
# (3)
f3_0123=1.0
f3 = f0+(x-x0)*f1_01+(x-x0)*(x-x1)*f2_012 + (x-x0)*(x-x1)*(x-x2)*f3_0123
print('f3:', f3)
print(func(0.75))

```

```

-1.0 0.0 1.0 8.0
1.0 1.0
f2_012: 0.0
f2: 0.75
f3: 0.421875
0.421875

```

3 Gauss-Seidelの収束性:25点

初期値を $[0, 0, 0]^t$ として、 $A(tt)x = b$ にガウス・ザイデルによる連立一次方程式の反復解法プログラムを適用する。ただし、

$$A(tt) = \begin{pmatrix} 1 & tt & tt \\ tt & 1 & tt \\ tt & tt & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

である。 $tt = 0.2, 0.5, 0.7$ に対して有効数字6桁の解を得るための反復回数を求めよ。

(E.クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.89, 問題2.3-9)

```

In [5]: import numpy as np
np.set_printoptions(precision=6, suppress=True)

tt=0.2
A=np.array([[1,tt,tt],[tt,1,tt],[tt,tt,1]])
b=np.array([2,2,2])
n=3
x0=np.zeros(n)
x1=np.zeros(n)

for iter in range(0, 9):
    for i in range(0, n):
        x1[i]=b[i]
        for j in range(0, n):
            x1[i]=x1[i]-A[i][j]*x0[j]
            x1[i]=x1[i]+A[i][i]*x0[i]
            x1[i]=x1[i]/A[i][i]

```

```

x0[i]=x1[i]
print(iter,x0)

0 [2. 1.6 1.28]
1 [1.424 1.4592 1.42336]
2 [1.423488 1.43063 1.429176]
3 [1.428039 1.428557 1.428681]
4 [1.428552 1.428553 1.428579]
5 [1.428574 1.42857 1.428571]
6 [1.428572 1.428571 1.428571]
7 [1.428571 1.428571 1.428571]
8 [1.428571 1.428571 1.428571]

```

```

In [6]: import numpy as np
np.set_printoptions(precision=6, suppress=True)

tt=0.5
A=np.array([[1,tt,tt],[tt,1,tt],[tt,tt,1]])
b=np.array([2,2,2])
n=3
x0=np.zeros(n)
x1=np.zeros(n)

for iter in range(0, 16):
    for i in range(0, n):
        x1[i]=b[i]
        for j in range(0, n):
            x1[i]=x1[i]-A[i][j]*x0[j]
            x1[i]=x1[i]+A[i][i]*x0[i]
            x1[i]=x1[i]/A[i][i]
            x0[i]=x1[i]
        print(iter,x0)

```

```

0 [2. 1. 0.5]
1 [1.25 1.125 0.8125]
2 [1.03125 1.078125 0.945312]
3 [0.988281 1.033203 0.989258]
4 [0.98877 1.010986 1.000122]
5 [0.994446 1.002716 1.001419]
6 [0.997932 1.000324 1.000872]
7 [0.999402 0.999863 1.000367]
8 [0.999885 0.999874 1.000121]
9 [1.000003 0.999938 1.000029]
10 [1.000016 0.999977 1.000003]
11 [1.00001 0.999993 0.999998]
12 [1.000004 0.999999 0.999999]
13 [1.000001 1. 0.999999]
14 [1. 1. 1.]
15 [1. 1. 1.]

```

```

In [7]: import numpy as np
np.set_printoptions(precision=6, suppress=True)

tt=0.7
A=np.array([[1,tt,tt],[tt,1,tt],[tt,tt,1]])
b=np.array([2,2,2])
n=3
x0=np.zeros(n)
x1=np.zeros(n)

for iter in range(0, 32):
    for i in range(0, n):

```

```

x1[i]=b[i]
for j in range(0, n):
    x1[i]=x1[i]-A[i][j]*x0[j]
x1[i]=x1[i]+A[i][i]*x0[i]
x1[i]=x1[i]/A[i][i]
x0[i]=x1[i]
print(iter,x0)

```

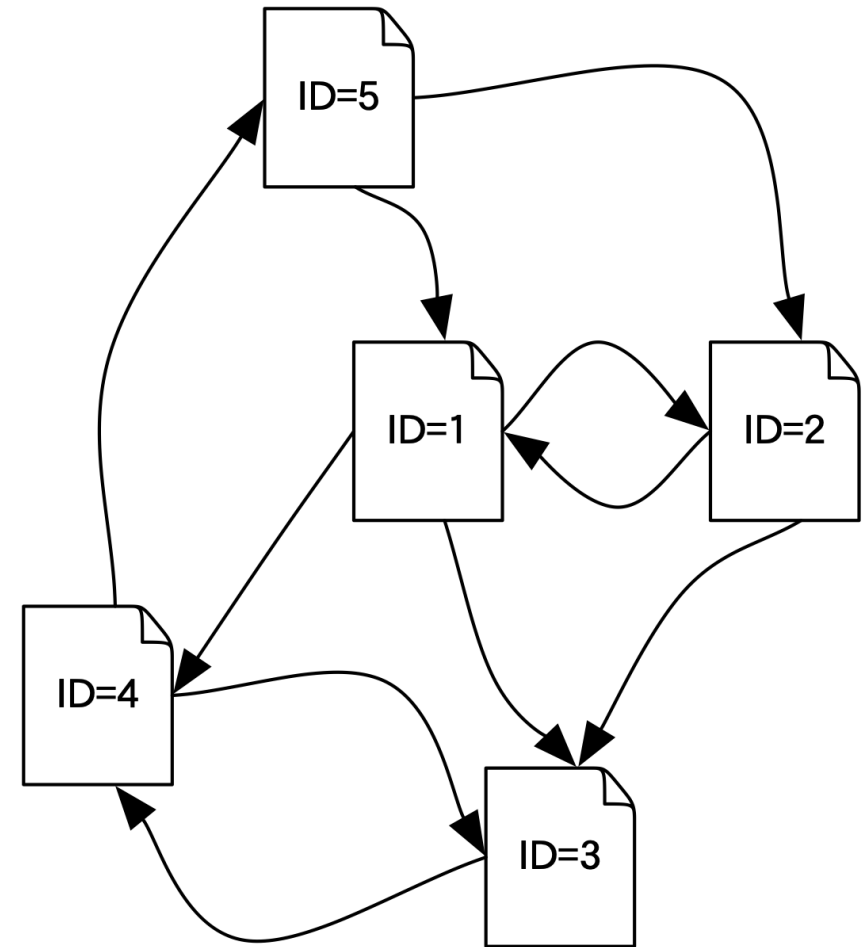
```

0 [2. 0.6 0.18]
1 [1.454 0.8562 0.38286]
2 [1.132658 0.939137 0.549743]
3 [0.957784 0.944731 0.66824 ]
4 [0.87092 0.922588 0.744544]
5 [0.833008 0.895714 0.789895]
6 [0.820074 0.873022 0.814833]
7 [0.818502 0.856666 0.827383]
8 [0.821166 0.846016 0.832973]
9 [0.824708 0.839623 0.834968]
10 [0.827786 0.836072 0.835299]
11 [0.83004 0.834263 0.834988]
12 [0.831524 0.833441 0.834524]
13 [0.832424 0.833136 0.834108]
14 [0.832929 0.833074 0.833798]
15 [0.83319 0.833109 0.833591]
16 [0.83331 0.833169 0.833464]
17 [0.833356 0.833225 0.833393]
18 [0.833367 0.833268 0.833355]
19 [0.833364 0.833297 0.833338]
20 [0.833356 0.833314 0.833331]
21 [0.833348 0.833325 0.833329]
22 [0.833343 0.83333 0.833329]
23 [0.833339 0.833333 0.83333 ]
24 [0.833336 0.833334 0.833331]
25 [0.833335 0.833334 0.833332]
26 [0.833334 0.833334 0.833333]
27 [0.833333 0.833334 0.833333]
28 [0.833333 0.833334 0.833333]
29 [0.833333 0.833334 0.833333]
30 [0.833333 0.833333 0.833333]
31 [0.833333 0.833333 0.833333]

```

4 ページランク:25点

次のようなリンクが張られたページ群のページランクを求めよ。



```

In [8]: from pprint import pprint
from numpy import array, zeros, diagflat, dot, transpose, set_printoptions
from scipy.linalg import eig

```

```

A = array([[0,1,1,1,0],
          [1,0,1,0,0],
          [0,0,0,1,0],
          [0,0,1,0,1],
          [1,1,0,0,0]])

```

```

n = 5
diag = []
for i in range(0,n):
    tmp = 0.0
    for j in range(0,n):
        tmp += A[i,j]
    diag.append(1.0/tmp)

```

```

D = diagflat(diag)
tA = dot(transpose(A),D)

```

```
set_printoptions(formatter={'float': '{: 0.3f}'.format})
print(tA)
```

```
[[ 0.000 0.500 0.000 0.000 0.500]
 [ 0.333 0.000 0.000 0.000 0.500]
 [ 0.333 0.500 0.000 0.500 0.000]
 [ 0.333 0.000 1.000 0.000 0.000]
 [ 0.000 0.000 0.000 0.500 0.000]]
```

初期ベクトルを等分の値にして、3度ほどホップさせた結果、

```
In [9]: x = array([1/5,1/5,1/5,1/5,1/5])
        pprint(dot(tA,dot(tA,dot(tA,x))))
```

```
array([ 0.125, 0.111, 0.269, 0.328, 0.167])
```

固有値を求める。固有値がソートされているか自信がないので、表示させてみた。

```
In [10]: l, V = eig(tA)
         pprint(l)
```

```
array([ 1. +0.j , 0.102423+0.501154j, 0.102423-0.501154j,
       -0.813177+0.j , -0.391669+0.j  ])
```

l[0]に対応する最大固有値のベクトルを取り出す。さらに、初期ベクトルからのホップと比較するために値を揃えている。順序は一致しているが、ホップ数が少ないので数値の一致はそれほど高くない。

```
In [11]: v0 = V[:,0]
         pprint(v0)
         pprint(v0/v0[0]*0.125)
```

```
array([-0.294489+0.j, -0.261768+0.j, -0.556257+0.j, -0.65442 +0.j,
       -0.32721 +0.j])
array([0.125 +0.j, 0.111111+0.j, 0.236111+0.j, 0.277778+0.j,
       0.138889+0.j])
```

id=4 (3番目) が一番ランクが高いので、それで規格化すると数字が読みやすい。

```
In [12]: pprint(v0/v0[3])
```

```
array([0.45-0.j, 0.4 -0.j, 0.85-0.j, 1. -0.j, 0.5 -0.j])
```

これより、ページランクは、 [4, 5, 2, 1, 3] の順になる。