数値計算試験問題

2023/07/12 実施

1 簡単な行列計算:25点

次の行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -4 & -5 & -7 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

また，固有ベクトルで構成される対角化行列P を用いて，ドット演算 により$P^{-1}.A.P$が対角化されることを確かめよ.

2 ニュートンの差分商補間:25点

三次関数x^3の$x=0.75$における値$F(0.75)$をニュートンの差分商補間を用いて求める． ニュートンの内挿公式は,

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor+(x-x_0)(x-x_1)f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor+ \\ &\cdots+\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\, f_n\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_n\rfloor \end{aligned}$$

である．ここで$f_i\lfloor\ \rfloor$ は次のような関数を意味していて,

$$\begin{aligned} f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor &= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \\ f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor &= \frac{f_1\lfloor x_1,x_2\rfloor-f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor}{x_2-x_0} \\ &\vdots \\ f_n\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_n\rfloor &= \frac{f_{n-1}\lfloor x_1,x_2\cdots,x_n\rfloor-f_{n-1}\lfloor x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rfloor}{x_n-x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる．$x_k=-1,0,1,2$をそれぞれ選ぶと，差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる．

k	x_k	$y_k=F_0(x_k)$	$f_1\lfloor x_k,x_{k+1}\rfloor$	$f_2\lfloor x_k,x_{k+1},x_{k+2}\rfloor$	$f_3\lfloor x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}\rfloor$
0	−1.0	−1.0			
			1.0		
1	0.0	0.0		$[XXX]$	
			1.0		1.0
2	1.0	1.0		3.0	
			7.0		
3	2.0	8.0			

それぞれの項は，例えば,

$$f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor = \frac{0.0-(-1.0)}{0.0-(-1.0)} = 1.0$$

で求められる．ニュートンの差分商の一次多項式の値はx=0.75で

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0(-1.0)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor && (1) \\ &= 1.0+(-0.75-(-1.0))\times(-1.0) && (2) \\ &= 0.75 && (3) \end{aligned}$$

となる．

(1) 差分商補間の表中の開いている箇所[XXX]を埋めよ．

(2) ニュートンの二次多項式

$$F(x) = F(x_0)+(x-x_0)f_1\lfloor x_0,x_1\rfloor+(x-x_0)(x-x_1)f_2\lfloor x_0,x_1,x_2\rfloor$$

の値を求めよ．

(3) ニュートンの三次多項式の値を求めよ．

(児玉鹿三著「理工系基礎数学解析-I」(槙書店， 1967), p.294)

3 Gauss-Seidelの収束性:25点

初期値を$[0,0,0]^t$として， $A(tt)x=b$ にガウス・ザイデルによる連立一次方程式の反復解法プログラムを適用する． ただし,

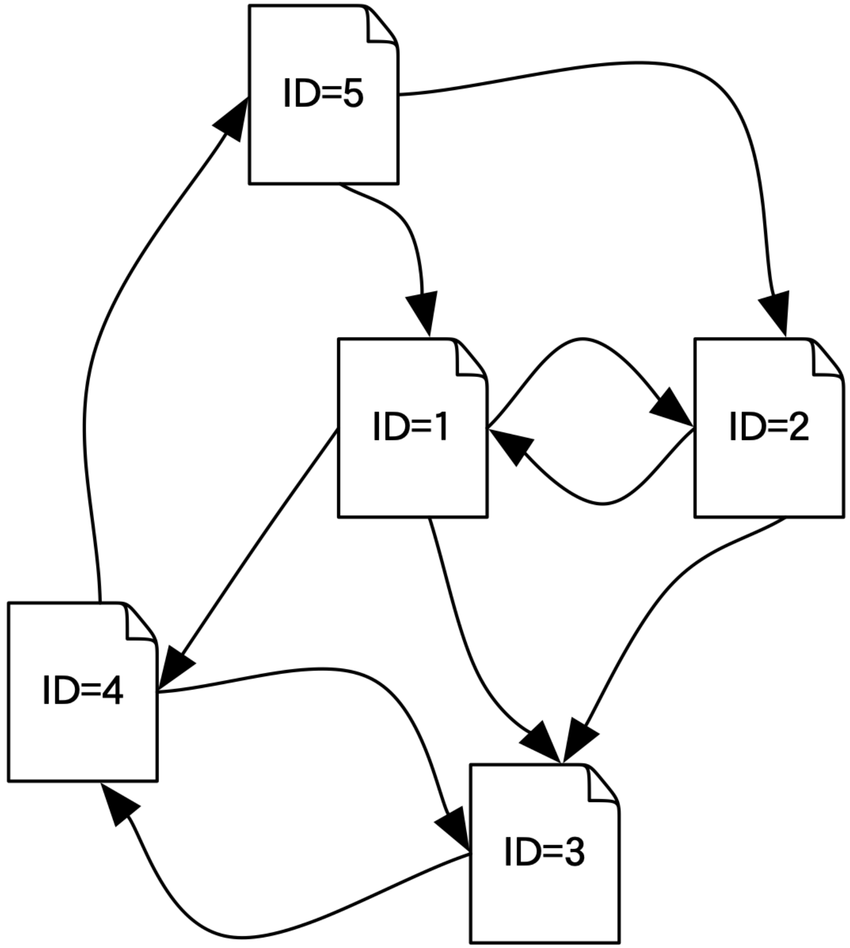
$$A(tt) = \begin{pmatrix} 1 & tt & tt \\ tt & 1 & tt \\ tt & tt & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

である． $tt=0.2,0.5,0.7$ に対して有効数字6桁の解を得るための反復回数を求めよ．

(E.クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.89, 問題2.3-9)

4 ページランク:25点

次のようなリンクが張られたページ群のページランクを求めよ．



ID=5
ID=1
ID=2
ID=4
ID=3