数式処理ソフト MAPLE による数学教育

関西学院大・理工　西谷滋人

1. はじめに

高等教育において数式処理ソフトを教える試みがいろいろなされているが，教員の個人レベルの科目での試験的導入が主で，学科のカリキュラムとして組み込まれていることはまれである．これは，数式処理ソフトの導入による学生への利害を読み切ることができないからであろう．これは，電卓や計算尺と同じ問題をはらんでいる．しかし，わからないからと言って一歩を踏み出さずにいることは，この大学改革の時代にあって後ろ向きの評価となろう．来年度より，本学部数理科学科において数式処理ソフトを用いた演習が必修化されることは，興味深い試みである．しかし一方で，著者個人は今までに 10 年以上にわたって数式処理ソフトの高等教育への導入をいろいろと試みたが，成功しているとは言いがたい．その反省をふまえて，数式処理ソフト習得の方策を提案する．

2. 数式処理ソフトで簡単にできること

数式処理ソフトを習得するのは，プログラミング言語を習得するのとはちがうセンスが必要であろう．しかしそのセンスはなにもむずかしい構文を新たに覚えるのではなく，それまで積み重ねてきた数学の知識の上にほんの少し修正を加えるだけでいい．この修正は中学の 1，2 年生あたりで導入される代数計算あるいは，式変形の約束と似たところがある．まずは，数式処理ソフト Maple で簡単にできることを観ながら，等号の意味を再確認しよう．

中学のあたりでつまずく学生の多くが，式の変形，代入，方程式を混同していることがある．例えば，小島寛之の著書に，よくある中学生の間違いとして，

$$3x - x = 3$$

という例が載っている [1]．これは $3x$ が $3 * x$ の略記であることを知らずに「3 と x から x を引いたら 3 が残る」と思っているらしい．たしかに小学校の「$3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$」なら正しい計算となる．期待している正しい「変形」は

$$3x - x = 2x$$

である．ところが，元の式も方程式と見なせば正しく，その辺りの混乱を引きずって知識を積み上げているようである．もうひとつ，プログラミングを大学で教えていてなかなか納得しない学生のなかに，

$$x = x + 1$$

は明らかに「式の変形，および方程式」として間違っているからというのがいる．刷り込まれた知識を否定するのはことのほか困難なようだ．これらすべては等号「=」があまりにも無節操に利用されているからと見なすこともできよう．しかし,「数学の習慣上そうなっているから自分で適当に判断してね」となる．

コンピュータが解釈しなければいけない数式処理ソフトである Maple ではこのような曖昧さが許されない．たとえば,

a=3,b=2 のとき，3a+4b の式の値はいくらか.

という問題を Maple に教えてやる場合には,

```
> a:=3;
b:=2;
3*a+4*b;
```

$$a := 3$$

$$b := 2$$

$$17$$

となる．等号の代わりに使われている記号":="は，代入を意味している．そういう解釈で問題を読み直すと,

a に 3 を,b に 2 を代入したとき，$3*a+4*b$ の式の値はいくらか.

となる．かけ算も含めて省略することは許されない．同様に,

$3x-x=3$ の方程式を満たす x はいくらか.

は

$3*x-x=3$ を x の方程式として解け (solve).

と読み直して,

```
> solve(3*x-x=3,x);
```

$$\frac{3}{2}$$

という Maple のコマンドになる．また,

$$(x-2)^2 = x^2-4x+4$$

$$x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$$

という展開 (expand) や因数分解 (factor) といった式変形も明示的に

```
> expand((x-2)^2);
```

$$x^2-4x+4$$

```
> factor(x^2-3*x+2);
```

$$(x-1)(x-2)$$

としなければならない．また通分 (normal) は

```
> normal(1/a+1/b);
```

$$\frac{b+a}{ab}$$

となる.

さらに,

$ax+bx-c$ を同類項でまとめよ.

というちょっと曖昧な問題は

$ax+bx-c$ を x の同類項でまとめ (collect) よ.

と読み直して,

```
> restart;
collect(a*x+b*x-c,x);
```

$$(a+b)x-c$$

となる．ここで，restart は上の方で a, b に代入した値を初期化 (restart) して忘れさせるための操作である．また関数のプロット

$y = 4x + 3$ をプロットせよ．

は，

```
> plot(4*x+3,x);
```

となる．

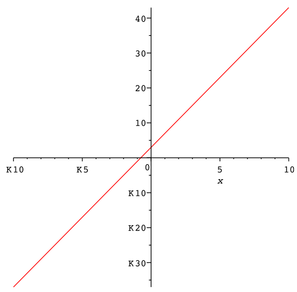

FIGURE 1. **plot 出力．**

またこれだけでなく，微分 (diff) や積分 (int) も

```
> diff(4*x+3,x);
```

$$4$$

```
> int(4*x+3,x);
```

$$2x^2+3x$$

として求めることができる．これらを新たな式 (eq2) として代入すれば，

```
> eq2:=int(4*x+3,x);
```

$$eq2 := 2x^2+3x$$

再利用が可能となり，

```
> solve(eq2,x);
```

$$0, -\frac{3}{2}$$

などとできる．

数式処理ソフトではもっと複雑な計算もコマンド一発ででき，2 次方程式の解法や部分積分，線形代数などの途中の複雑な計算・手順にわずらわされることはない．ただし，数学の用語に該当する英単語を覚えなければならない．理系に来ている学生の多くは，英語ができないという消去法で理系を選択していることが多いので，横文字を見ただけで凍り付く傾向がある．しかし，専門用語を覚え，英語の論文を読む際に不可欠の単語に早いうちからなじむという意味でこの暗記過程は避けて通ることはできない．逆に，ある程度の経験のある研究者は，ほとんど自分の知識だけで Maple が習得できる．

3. 数式処理ソフトでも簡単にできないこと

先ほど紹介した例がほぼコマンド一発で解が得られるのに対して，だいぶ込み入った例を次に紹介する．まず，この式変形の問題は，普通の試験問題としては，成立していないことに注意していただきたい．学生さんたちは，紙面の上で導出されてしまっている式を再度込み入ったソフトを使って導出することに問題としての意味を感じないそうである．ところが，数式処理ソフトの熟達者が備えているべき行動，つまり数式処理ソフト学習のターゲット行動はこのような「式の導出をコマンドでおこなう」ことである．

数式処理ソフトの熟達者にとっては，こういう類いの問題は，使っている数式処理ソフトで何が簡単にできて何がやりにくいかという評価や，どういったときにどういった手法を使うのかが学習できる典型的な問題である．また，実際の研究においても，式の導出を確認し，さらに値を換えてみるというのはもっとも遭遇頻度が高い問題である．つまりここで掲げたような，マルチステップの式変形が数式処理ソフト学習者のターゲット行動である．

3.1. **課題：.** プランクの法則は，黒体の表面から放出される光の強度は以下のようになることを示している．

$$I(\nu,T)=\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \tag{1}$$

ここで，h はプランク定数，c は光速度，k はボルツマン定数，ν は振動数，T は温度を表している．つまり，面積 A の黒体の表面からは，立体角 $\mathrm{d}\Omega$ に向かって，$(\nu+\mathrm{d}\nu)$ の振動数帯から $I(\nu,T)A\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega$ の強度を持った光が放出されていることを示している．これをすべての立体角および振動数でせきぶんすれば，黒体の放出する単位面積あたりの全強度を示すステファンーボルツマンの関係

$$j=\sigma T^4 \tag{2}$$

が導かれる．この法則を以下のヒントを参考にして Maple で導出せよ．

3.2. **ヒント：導出.** 立体角の積分公式から，全積分は

$$j=\frac{2h}{c^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\cos(\phi)\sin(\phi)\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{3}$$

で与えられる．θ と ϕ についてまず積分すると

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{A1}\cos(\phi)\sin(\phi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\mathrm{A1}\pi \tag{4}$$

が得られる．これより

$$j=\frac{2\pi h}{c^2}\int_0^{\infty}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\mathrm{d}\nu \tag{5}$$

となる．ここで $\nu=\frac{xkT}{h}$ で置換すると，$\mathrm{d}\nu=\frac{kT}{h}\mathrm{d}x$ を忘れず，

$$j=\frac{2\pi k^4T^4}{c^2h^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\exp(x)-1}\mathrm{d}x \tag{6}$$

となる．この積分は

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x)-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15} \tag{7}$$

であるので，

$$j = \sigma T^4 \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{2}{15}\frac{\pi^5 k^4}{h^3 c^2} \tag{9}$$

が得られる.（英語版 Wikipedia，項目「Stefan-Boltzmann law」より訳出）

3.3. **ヒント：Maple のテクニック．** どこから手をつけてもいいが，最終的な Maple スクリプトとしては，プランクの法則の式から σ の値までがすべて式の変形，代入であらわされていることが理想．特に難しいのは係数の取り出しで，例えば，

```
> restart;
nu:=x*k*T/h;
cdx:=diff(nu,x);
```

$$\nu := \frac{xkT}{h}$$

$$cdx := \frac{kT}{h}$$

とすれば，置換積分に伴う係数を定義することができる．また，$\frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}$ などは coeff 関数で x の 3 乗の係数を取り出すなどとすればよい．ただし，

```
> c1:=A2*x^3/(exp(x)-1);
coeff(c1,x^3);
```

$$c1 := \frac{\mathrm{A2}x^3}{\exp(x)-1}$$

```
Error, unable to compute coeff
```

となるが，以下のようにすれば係数 A2 が取り出せる．

```
> coeff(c1*(exp(x)-1),x^3);
```

$$\mathrm{A2}$$

3.4. **解答例．** 解答例を示しておく．まず立体角に対する積分の確認は

```
> restart;
eq1:=int(int(A*sin(phi)*cos(phi),phi=0..Pi/2),theta=0..2*Pi);
```

$$eq1 := A\pi$$

となる．次に，この結果を受けて Planck の公式を書き下すと

```
> eq2:=2*h*nu^3/c^2/(exp(h*nu/k/T)-1)*Pi;
```

$$eq2 := \frac{2\ h\ \nu^3 \pi}{c^2 \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)}$$

である．ここで変数変換

```
> nu:=x*k*T/h;
dx:=diff(nu,x);
```

$$\nu := \frac{xkT}{h}$$

$$dx := \frac{kT}{h}$$

をおこなう．すると eq2 は

```
> eq2*dx;
```

$$\frac{2x^3 k^4 T^4 \pi}{h^3 c^2 (\exp(x) - 1)}$$

となる．このままとりあつかっても変形できるが，ややこしい係数を切り離しておく．上記の Maple のテクニックのヒントに従って

```
> eq2*dx*(exp(x)-1);
```

$$\frac{2x^3 k^4 T^4 \pi}{h^3 c^2}$$

とした後で，係数を取り出す．

```
> c1:=coeff(eq2*dx*(exp(x)-1),x^3);
```

$$c1 := \frac{2k^4 T^4 \pi}{h^3 c^2}$$

残された被積分関数を取り出す．

```
> eq3:=eq2*dx/c1;
```

$$eq3 := \frac{x^3}{\exp(x) - 1}$$

積分を実行して，

```
> eq4:=int(eq3,x=0..infinity)*c1;
```

$$eq4 := \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4 T^4}{h^3 c^2}$$

ここでは係数をつけなおしている．最終的に σ の値は，それぞれの定数値を代入して

```
> h:=6.6261*10^(-34);
k:=1.3807*10^(-23);
c:=2.9979*10^8;
evalf(coeff(eq4,T^4));
```

$$h := 6.626100000 10^{-34}$$

$$k := 1.380700000 10^{-23}$$

$$c := 2.997900000 10^{8}$$

$$5.671228656 10^{-8}$$

となる．

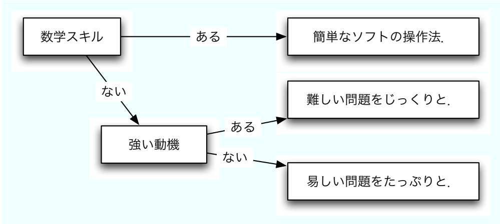

Figure 2. **数式処理ソフトスキルの学習法．**

3.5. **分析．** この問題を 2 つの演習クラスの受講生に，学習を初めて一ヶ月たった時点での試験問題として課した．かたや数学科，かたや情報科学科の 3 回生である．それまでに基本操作を教え，使いそうなコマンドの一覧表を手渡している．その結果，数学科の学生は 18 人中 6 名がこの問題を解いた．一方，情報科学科学生は 51 人中 3 名しか解けなかった．問題を観ればわかる通り，広義積分をのぞけば，これは典型的な高校の数式変形の問題である．複雑な問題をコマンド一発で答えが出るシングルステップの問題に分解し，その解を設定して問題を試行錯誤しながら解決して行く能力に差がついていることが伺われる．入学時の学力差はそれほど大きくないことから，1，2 回生での数学の演習においてこのような類いの問題になじんでいることが大きな差となって現れたと考えられる．

一方，プログラミングの要素が強くなる問題に於いてはこの傾向が逆転することを申し添えておく．いずれにしろ，数式処理ソフトを使わなくても解ける学習者は，数式処理ソフトを使っても解けるという試験結果で，この点が筆者の数式処理ソフトのカリキュラムへの導入の動機を下げていた．しかし，もう少し学習行動を突っ込んで考えると，少し違った点が明らかとなる．

4. スキル向上の方策？

数式処理ソフトの熟達者となるためのターゲットとなる行動を上のように定義したとして，スキル向上にはなにが必要なのであろうか．数学のスキルがすでにある学習者に数式処理ソフトを使わせることはそれほど難しくない．「数式処理ソフトで簡単にできること」で示した通りである．数学を使う動機もスキルも高い学生が，無理して数式処理ソフトを使う必要はなさそうに思えるかもしれない．しかし，数式処理ソフトを正しく使えば，計算ミスや新たな展開の方向を見つけることができる．

一方，数学のスキルが低い学生が，数式処理ソフトのスキルを身につけるには相当な苦労が必要であろう．数式処理ソフトの初学者にとっては，簡単な計算をするのに数式処理ソフトを使うのはおっくうで，電卓や表計算ソフトあるいは公式集の方が便利である．一方，どうしても解かなければならない数学の複雑な問題があったとしても，数式処理ソフトの使用法を学習し直して解こうというのは，学習者にとって二重苦を課しているようなものである．これは，強制されねば新たな学習法，知識を使うことを避けるという法則を実証している．テニスなどのスポーツで一度ついた癖を直す苦労によく似ている．

では，数学の能力が低い学生にどのようにして数式処理ソフトのスキルを習得させればいいだろうか．まず,「数学」と「計算」を分けて考えよう.「計算」には，関数のグラフ化も含んでいる．著名な物理学者のファインマンはその著書のなかで，物理の問題を解く際に必要となる代数や，微分，積分は，小学生時代の九九と同じように暗記するよう薦めている．ところが直後に彼は,「（物理学者のやり方を習うには,）公式の暗記だけに頼ることはやめて，自然界の様々なものごとの相互の関連性を理解すること，そのことを心がけ

てほしい.」としている [2]．この線引きに数学の先生はご立腹されるだろうが，ある程度の下位技能の自動化は不可欠である.「数式処理ソフトでも簡単にできないこと」でお見せした通り，数式処理ソフトを使えば，式変形と「計算」を区別することができる．そして「計算」はほとんどの場合に自動化すべき下位技能にあたる．

数学のスキルは低くとも，動機は高い学習者に対する適切な方策はなんであろうか．この場合は難しい問題をじっくりと解くのが良さそうだ．前報において，学生が Maple を使うのに障壁を感じる原因の一つとして,「すぐに問題が難しくなり，Maple に費やす時間よりも問題とその解答を理解するのに多くの時間が割かれ，実際に Maple をいじっている時間はわずかのように思われます.」という批判をあげた [3]．その当時は，この批判に対して，自分の経験から，簡単な問題をいくらやってもすぐにコマンドを忘れてしまい時間の無駄と反論した．それは，強い動機を持った学習者，すなわち複雑な問題を解かなければならずかつ「計算」の能力が低い自分には数式処理ソフトが不可欠と信じている学習者，に対する方策であったのであろう．さらにいくつかの問題を自力で解けたという成功体験が，ソフトに対する強い信頼感を生んでいた．

では，動機も低い学生に対する適切な方策はなんであろうか．これには，習慣を付けさせるしかない．しかも，ある程度のレベルを超えるまで集中して．数学は，自動車の運転や，ピアノの運指と同じで，非宣言的知識の典型である．長いこと使わないと思い出すのに時間がかかるが，一度思い出せば難なく使える．このようなスキルを身につけるためには，ある程度のレベルまで集中して練習を繰り返すのが効果的とされている [4]．ある程度の「数学」能力がなければ,「計算」のための道具の使い方になじんでも，すぐに忘れてしまい，問題を解こうという気は起こらないであろう．現在の「ゆとられ」あるいは「大学全入」世代に高校での相当量の演習を通じた「数学」能力の習得は望むべくもない.「計算」を数式処理ソフトに頼りながらでも，簡単な「数学」の演習を多くこなさせることが効果的な方策ではなかろうか．そのような視点からのテキストの試みとして,「チャート式 Maple 演習」を公開している [5]．学生たちがその昔電卓を手に数学や物理の問題に取り組んだように，まずは数式処理ソフトを立ち上げるようになることを願う．

References

[1] 小島寛之, 『数学でつまずくのはなぜか』, 講談社,2008.
[2] ファインマン，ゴットリーブ，レイトン，『ファインマン流物理がわかるコツ』, 岩波書店，2007， p.31.
[3] 西谷滋人,『Maple を利用した応用数学教育』, コンピュータ＆エデュケーション, Vol.13(2002), 33–39.
[4] B. フィールディング,『同じテーブルの 10 人の名前，簡単に覚えられます.』, 三笠書房, 2005.
[5] 西谷滋人,『チャート式 Maple 演習』, `http://ist.ksc.kwansei.ac.jp/~nishitani/Lectures/Maple/BottomLine0.html`.