

数値計算

2014/12/19 実施
(西谷@関学・理工・情報科学)

[1] (数値積分の収束性:25 点)

次の積分

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

の数値積分において近似精度が向上する様子を見る。

1. 台形公式を用いて $h=1, h=0.5, h=0.25$ として数値積分せよ。
2. 理論値 (π) との差を縦軸に、横軸に分割点数をとり片対数 (logplot) でプロットせよ。
(E. クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.61, 問題 1.5-3 改)

[2] (大きな数どおしのわずかな差による丸め誤差:25 点)

大きな数どおしのわずかな差は、丸め誤差にとくに影響を受ける。

1. $0.105360-0.117783$ を有効数字がそれぞれ 5 桁, 4 桁, 3 桁, 2 桁で計算した結果を示せ。
2. 同様に, $(0.105360-0.117783)/2.000000$ を有効数字がそれぞれ 5 桁, 4 桁, 3 桁, 2 桁で計算した結果を示せ。

(E. クライツィグ著「数値解析」(培風館,2003), p.10, 問題 1.1-3 改)

注1 for-loop などでは回さないように、Digits が効かない。

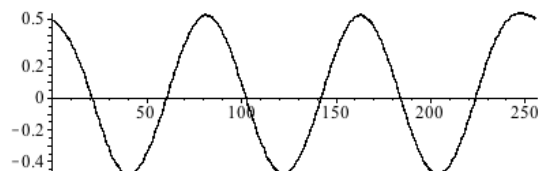
注2 Digits を変更すると他のプログラムにも影響するので、それぞれの問題の解答の冒頭に restart を入れることを忘れないように。

[3] (FFT の強度表示および高周波カット:25 点)

1. $\cos\left(\frac{x}{13}\right)$ と $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ を重ね合わせた関数に FFT をかけて (スペクトル) 強度を周波数で表示せよ。
2. 次の方形フィルター

```
filter:=x->piecewise(x>=0 and x<=10,1);
```

によって高周波成分をカットし、逆フーリエ変換した結果をプロットせよ。次のようになれば正解。



注1 教科書と先終 (12/12) 渡した解答では使っている変数名が違う。教科書 (RData, FData)→ 解答 (X, Y) に書き換える必要がある。

[4] (対数関数のニュートンの差分商補間:25 点)

2 を底とする対数関数 (Maple では $\log[2](x)$) の $F(9.2) = 2.219203$ をニュートンの差分商補間を用いて求める. ニュートンの内挿公式は,

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2] + \cdots + \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) f_n[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

である. ここで $f_i[\]$ は次のような関数を意味していて,

$$\begin{aligned} f_1[x_0, x_1] &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ f_2[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f_1[x_1, x_2] - f_1[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &\vdots \\ f_n[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{f_{n-1}[x_1, x_2, \dots, x_n] - f_{n-1}[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned}$$

差分商と呼ばれる. $x_k = 8.0, 9.0, 10.0, 11.0$ をそれぞれ選ぶと, 差分商補間のそれぞれの項は以下の通りとなる.

k	x_k	$y_k = F_0(x_k)$	$f_1[x_k, x_{k+1}]$	$f_2[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f_3[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	8.0	2.079442			
1	9.0	2.197225	0.117783	ア	
2	10.0	2.302585	0.105360	-0.0050250	0.0003955000
3	11.0	2.397895	0.095310		

それぞれの項は, 例えば,

$$f_2[x_1, x_2, x_3] = \frac{0.095310 - 0.105360}{11.0 - 9.0} = -0.0050250$$

で求められる. ニュートンの差分商の一次多項式は

$$F(x) = F_0(8.0) + (x - x_0)f_1[x_1, x_0] = 2.079442 + 0.117783(9.2 - 8.0) = 2.220782$$

となる.

- 差分商補間の表中の開いている箇所 ア $f_2[x_0, x_1, x_2]$ を埋めよ.
- ニュートンの二次多項式

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)f_1[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f_2[x_0, x_1, x_2]$$

の値を求めよ.

- ニュートンの三次多項式の値を求めよ.

ただし, ここでは有効数字 7 桁程度はとるように. (E. クライツィグ著「数値解析」(培風館, 2003), p.31, 例 4 改)