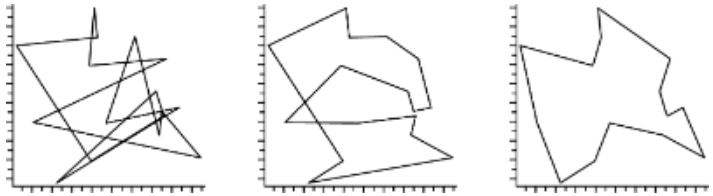
巡回セールスマン問題のシミュレーテッドアニーリング法

課題

ランダムに生成した16都市を順にめぐって元に戻ってくる最短経路をアニーリング法(simulated annealing)を用いて求めよ．N=16の場合の(左)初期配置，(中)単純に総距離が下がった場合だけを採用した結果，および(右) simulated annealingの計算結果を図に示す．



課題の背景

巡回セールスマン問題とは，ある街から出発していくつかの街を次々とめぐって元の街に戻ってくる最短の経路を求める問題である．訪れる街の数が少ないときにはすべての経路を数え上げればいいが，数が増えるとその計算時間は指数関数的に増えてしまうと予想される．このような問題はセールスマンだけでなく，コンピュータのCPUの配置や，都市ガスの配管設計などでも出会う．

アルゴリズムは以下のとおり．

1 配置 a を仮定し$E(a)$を求める．

2 a からすこし違った配置$a+\delta a$を作る．

3 $\Delta E = E(a+\delta a) - E(a)$を求める．

4 $\Delta E < 0$なら新たな配置を採用する．

5 $\Delta E > 0$なら新たな配置を$\exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right)$の確率で受け入れる．

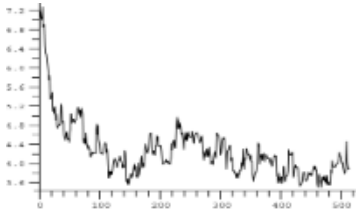
6 手順 2 以下を適当な回数繰り返す．

ここで Tは温度から類推される制御パラメータで，十分大きい場合はすべての状態が採用される．一方，Tを下げるにつれて採用される試行が少なくなり，徐々に状態が凍結されていく．$a+\delta a$の生成方法と Tの下げ方をうまく取れば最小値に近い状態が確率的に高く出現し，最小値かそれに近い状態へ落ち着くというアルゴリズム．

対象となる経路の長さの合計を

$$E(a) = \sum_{i=1} \left| r[a_i] - r[a_{i+1}] \right|$$

としておく．ここでaはそれぞれの街の順番あるいは配置を示している．rはそれぞれ街の座標で$|r|$で距離を求める．するとこの関数は模式的に図のようになると考えることができる．



すべての配置について$E(a)$を求めれば，最小値が求まる．あるいは初期の配置を

$$a=[1,2,3,\ldots,N,1]$$

として，一定の手順で変更δaを加え，$E(a)$が下がった場合にその配置を採用するという方法をとることも出来る．しかし，この方法は極小値に落ちてしまうことが分かるであろう．最小値を探すには時として坂を駆け登る必要がある．このような問題の一つの解法としてアニーリング法(simulated annealing)がある．これは格子欠陥を多く含んだ金属を高温へ上げて欠陥を掃き出し柔らかくする熱処理(焼きなまし，annealing)からの類推で名付けられた手法である．

解法のヒントと発展課題

1 街の位置をランダムに生成する．以下は例では[0,1)の乱数を使って(x,y)座標を生成している．

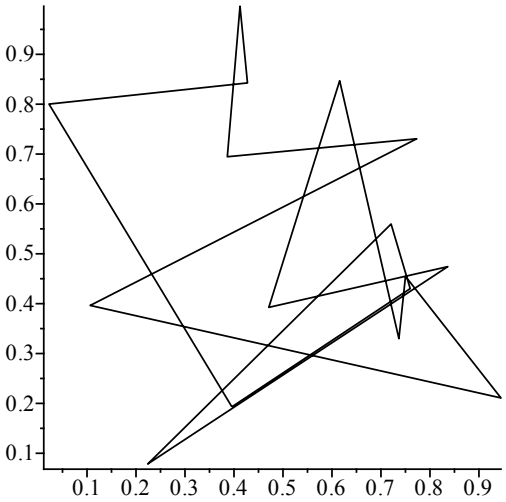
```
> restart;
  N_city:=16;
  Position:=seq([evalf(rand()/10^12),evalf(rand()/10^12)],i=
  1..N_city):
```

$$N\_city := 16 \qquad (1.3.1)$$

2 ルートa (=Path)を示す配列(リスト)を作成し，そのルートを表示するには以下のようにすればよい．

```
> with(plots):
  Path:=[seq(i,i=1..N_city),1];
  Real_Path:=[seq(Position[Path[i]],i=1..N_city),Position[1]
  ]:
  PLOT(CURVES(Real_Path));
```

$$Path := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 1]$$



3 街の間の距離を計算した2次元のリストを用意せよ.

4 ルート*a*を受け取って，前問で作成したリストを参照してルートの総距離を返す関数 *E*(*a*) を作れ.

5 ルート*a* (=Path)から任意に2都市を取りだして入れ替える試行を*da*として新たなルートを作ってみよ．都市をランダムに選ぶ関数は以下のようにして定義できる.

```
> sel_city:=rand(2..N_city):
```

6 上述のアルゴリズムにしたがって最短ルートを探すプログラムを作成せよ.

7 総距離を記録して，その結果を表示せよ.

8 【発展問題】さらに総距離とそのルートを記録する関数を作って，その結果を表示せよ.

9 【発展問題】ルートの入れ替えを切り出したルートを逆順にして埋めもどす，つまり，
a=[1,2,3,4,5,6,7,1]
で，3，6が選ばれた場合，
a=[1,2,6,5,4,3,7,1]
という操作を組み込み，64都市で試せ.