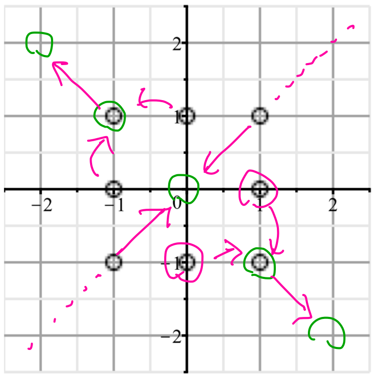
v.22.2 2022/11/3

情報工学のための数学演習 (線形代数) 試験問題

1. 表現行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする写像によって，図 1 の丸で示した 8 点はどこへ写像されるか？　解答用紙に図 1 を書き写して写像前後の点をプロットせよ．また，この写像の核 Ker(Kernel) の基底を求めよ．(20 点)



Im f: $y = -x$

Ker f: $y = x$

図 1: 写像プロット．

$1 \quad 0 \quad -7/4$
$0 \quad 1 \quad -5/4$
$7x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 ; 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\right\}$ の直交補空間 $V^\perp$ を求めよ．(20 点)

3. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 2)$，$\boldsymbol{b} = (2, -4, 2)$ を，ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1)$，$\boldsymbol{a}_2 = (-1, -1, -1)$，$\boldsymbol{a}_3 = (-1, -3, -1)$ の一次結合で表せ．(20 点)

$3a_1 + a_2$

4. 次の行列の固有値とそれに対する固有空間を求めよ．(20 点)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4 \qquad 2 \qquad -2$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき，f の Imf および Ker$f$ の次元と 1 組の基底を求めよ．(20 点)

Im f 2 dim $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ker f 2 dim

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$　像はつぶれる.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

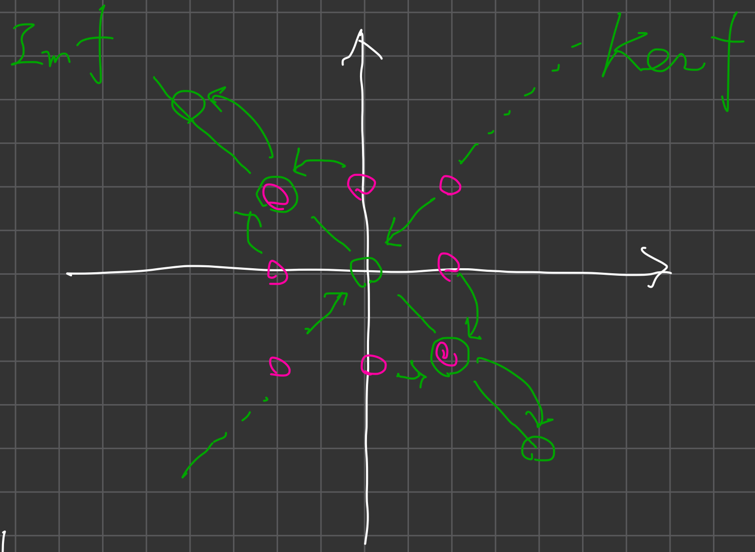
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

$x - y = 0$

$x = y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad y = -x$$

$$\mathrm{Ker}\, f = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = x$$

2

$$\begin{matrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5/4 \end{matrix} \qquad +②\times 3$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -7/4 \\ 0 & 1 & -5/4 \end{matrix}$$

$$2-3\,\frac{5}{4} = \frac{8-15}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} +7 \\ +5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

直交ベクトル

$V^{\perp}$

$$\boxed{+7x_1+5x_2+4x_3=0}$$

$$(2\ -2\ -1)\begin{pmatrix} +7 \\ +5 \\ 4 \end{pmatrix} = (+14-10-4 = 0$$

$$(1\ -3\ 2)\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 7-15+8=0$$

検算

$$7x_1+5\alpha+4\beta=0$$

$$7x_1 = -5\alpha-4\beta$$

$$x_1 = -\frac{5}{7}\alpha - \frac{4}{7}\beta$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$V^{\perp}$ の基底

$\boxed{3}$

a_1	a_2	a_3	a	b
1	-1	-1	-2	2
-1	-1	-3	1	-4
1	-1	-1	2	2
1	-1	-1	-2	2
0	-2	-4	-1	-2
0	0	0	4	0

$\uparrow$

OUT

1	-1	-1	2
0	1	-2	1
1	0	-3	3
0	1	-2	1

検算

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 - 2\lambda = 1$$

$$x_2 = 1 + 2\lambda$$

$$x_1 - 3\lambda = 3$$

$$x_1 = 3 + 3\lambda$$

$\lambda = 0$ $x_1 2$

~~a~~ $\boxed{b = 3a_1 + a_2}$

$$\boxed{3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -\lambda+3 & 1 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4+\lambda & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$\cancel{(4-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)}$

$-(4-\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda)$

$\boxed{\lambda = 4,\ 2,\ -2}$

$\lambda = 4$

$$\begin{vmatrix} 1-4 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 3-4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2y + 2z = 0$

$y = z$

$-3x - 2\alpha - \alpha = 0$

$-3x = +3\alpha$

$x = \alpha$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ +3 & 0 & 1 \\ +3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

OK

$\lambda = 2$

$$\begin{vmatrix} 1-2 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3+3 & -2+6 & 1+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y = -z$

$-x + 2z - z$

$-x + z = 0$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & +2 & +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

OK

$\lambda = -2$

$$\begin{vmatrix} 1+2 & -2 & -1 \\ -3 & +2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y = z$

$3x - 2z - z = 0$

$x = z$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OK

$\boxed{5}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2-2 & -1 & -1+2 & 3-2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\operatorname{Im} f$ 2 dim $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f$ 2 dim

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y - \alpha - \beta = 0$

$y = \alpha + \beta$

$x - \alpha + \beta = 0$

$x = \alpha - \beta$