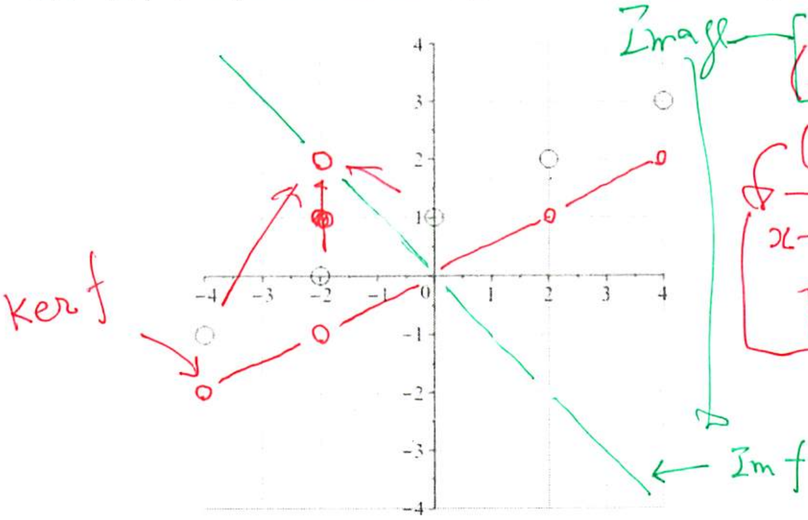
[ Ans ]

v.19.4 2019/07/10 実施

# 情報科学のための数学演習 (線形代数) 試験問題

1. 表現行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする写像 $f$ によって，図 1 の丸で示した 5 点はどこへ写像されるか？解答用紙に図 1 を書き写して写像前後の点をプロットせよ．また，この写像の核 (Kernel) はどこになるか？同じプロット上に示せ．(20 点)




$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{matrix} x - 2y = 0 \\ y = \frac{1}{2} x \end{matrix}}$ Kernel

図 1: 写像プロット．

2. つぎの連立 1 次方程式を解き，一般解を「特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の基本解の 1 次結合の和」の形で表せ．(20 点)

$$\begin{cases} x & -2y & -z & +2u & = 3 \\ -x & +2y & +2z & -2u & = 1 \\ 2x & -4y & -z & +4u & = 10 \\ -2x & +4y & +3z & -4u & = -2 \end{cases}$$

3. $\boldsymbol{R}^3$ において $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{a}_2 = (-1, -4, 2)$ で生成される部分空間を $U$，$\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 0), \boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 1)$ で生成される部分空間を $V$ とするとき，交わり $U \cap V$ および和 $U + V$ を求めよ．(20 点)

4. 次の行列の固有値とそれに対する固有空間を求めよ．(20 点)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像

$$f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1)$$

が線形写像であるかどうか調べ，線形写像ならば対応する表現行列を求めよ．(20 点)

( / / )

# 情報科学のための数学演習（線形代数）(解答用紙)

学籍番号：　　　　氏名：

## 2

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 10 \\ -2 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline & \alpha & & \beta & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x - 2\alpha - \underset{}{\overset{4}{\underline{z}}} + 2\beta = 3$$

$$x = 2\alpha - 2\beta + 7$$

$$7 + \cancel{2\alpha} - \cancel{2\beta} - \cancel{2\alpha} - (4) + \cancel{2\beta} = 3$$

$$-7 - \cancel{2\alpha} + \cancel{2\beta} + \cancel{2\alpha} + 8 - \cancel{2\beta} = 1$$

## 3

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & x \\ \hline 1 & -1 & x \\ 1 & -4 & y \\ 1 & 2 & z \\ \hline 1 & -1 & x \\ 0 & -3 & y-x \\ 0 & 3 & z-x \\ \hline 1 & -1 & x \\ 0 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & \boxed{-2x+y+z} \\ \hline \end{array}$$

U

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & x \\ \hline 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ \hline 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z \\ \hline 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \boxed{z-y+x} \\ \hline \end{array}$$

V

$$\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$z = \alpha$

$y = 3\alpha$

$x = y - z$

$= 3\alpha - \alpha$

$= 2\alpha$

$U + V \to R^3$

$-4+3+1=0$ OK

交わり $\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

足らなければ裏面を使え.

( / / )

# 情報科学のための数学演習（線形代数）(解答用紙)

学籍番号：　　氏名：

4

$$\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -3 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -\lambda \\ -2 & -1 & -\lambda \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -\lambda \\ 0 & -4+\lambda & 0 \end{matrix}$$

$-(-\lambda)(-4+\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda = 0, 2, 4.$

$\boxed{0}$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$y = z$

$2x + y - z = 0$

$2x = 0$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 3-3 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ +2 & +1 & +1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{matrix}$$

$y = z$

$2x + y + z = 0$

$2x = -2z$

$x = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1-1 \\ 2+3-3 \\ 2-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \begin{matrix} 0 \\ 2+1-3 \end{matrix}$

3 $\boxed{4}$

$$\begin{matrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$y = z$

$+2x = y + z$

$\boxed{x = z}$

$2x = 2z$

$x = z$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -2-1-1 \\ 2-3-3 \\ 2+1+1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

足らなければ裏面を使え.

( / / )

**情報科学のための数学演習（線形代数）(解答用紙)**

**学籍番号：** **氏名：**

$\boxed{5}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \alpha a_2 + \beta b_2 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 - \alpha a_3 - \beta b_3 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 + b_2 \\ b_2 - b_3 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta f \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \cancel{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

足らなければ裏面を使え.