

情報科学のための数学演習 (線形代数) 試験問題

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を考える. A を表現行列とする写像によって点 $(1, 0), (0, 1)$ はどのような点に写像されるかを座標平面を書いて図示せよ.

また, この行列を表現行列としてもつ線形写像 f の $\text{Im} f$ および $\text{Ker} f$ の次元と一組の基底を求め, 図示せよ. (20 点)

2. つぎの連立 1 次方程式を解き, 一般解を「特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の基本解の 1 次結合の和」の形で表せ. (20 点)

$$\begin{cases} x - 2y - z + 2u = 2 \\ -x + 2y + 2z - 2u = 2 \\ -x + 2y + 4z - 2u = 10 \\ 2x - 4y - 5z + 4u = -8 \end{cases}$$

3. \mathbf{R}^n のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立のとき, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ は 1 次独立であるかどうか調べよ. (20 点)

4. グラム・シュミットの直交化法により, 次のベクトルから \mathbb{R}^3 の正規直交基底を作れ. (20 点)

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{x}_2 = (1, 0, -1), \mathbf{x}_3 = (0, -1, 1)$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値とそれに対する固有空間を求めよ. (20 点)