

情報科学のための数学演習 (線形代数) 試験問題

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を考える. A を表現行列とする写像によって点 $(-1, 0), (0, 1)$ はどのような点に写像されるかを座標平面を書いて図示せよ.
また, この行列を表現行列としてもつ線形写像 f の $\text{Im}f$ および $\text{Ker}f$ の次元と一組の基底を求め, 図示せよ. (20点)
2. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ において, (2,3) 成分 -2 の余因数 A_{23} を求めよ. また, 第3列で余因数展開することにより, D の値を求めよ. (20点)
3. \mathbb{R}^3 のベクトル $\mathbf{a} = (4, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, 1)$ をベクトル $\mathbf{a}_1 = (2, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-5, 3, -1)$ の一次結合で表せ. (20点)
4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能ならば変換の行列を求めて対角化せよ.
(20点)
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^3 への線形写像 f を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で与えるとき, f の $\text{Im}f$ および $\text{Ker}f$ の次元と1組の基底を求めよ. (20点)