

## 情報科学のための数学演習 (線形代数) 試験問題

1.  $f, g$  を  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への線形写像とし、表現行列をそれぞれ  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  とする.  $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  とすると、この点  $\boldsymbol{x}$  は、 $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$  および  $\boldsymbol{x}'' = f(\boldsymbol{x}')$  へと移っていく. 座標平面を書いて、 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''$  の点を記せ.

また、合成写像

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$$

の表現行列を求めよ. 点  $\boldsymbol{x}$  が点  $\boldsymbol{x}''$  に写されることを直接計算で確かめよ. (20 点)

2. つぎの連立 1 次方程式を解き、一般解を特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の基本解の 1 次結合の和の形で表せ. (20 点)

$$\begin{cases} x & -3y & & +2u & = & 4 \\ x & -3y & +z & +2u & = & 7 \\ -x & +3y & +z & -u & = & 1 \\ 2x & -6y & -3z & +4u & = & -1 \end{cases}$$

3. つぎの行列が正則ならば、逆行列を求めよ. (20 点)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

4.  $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, 2)$ ,  $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 4, 3)$  で張られる  $\mathbb{R}^3$  の部分空間を  $V = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$  とする. この時,

(a)  $V$  の次元と一組の基底を求めよ.

(b)  $\boldsymbol{b}_1 = (1, 5, 0)$ ,  $\boldsymbol{b}_2 = (3, 3, -4)$  は  $V$  を生成することを示せ.

(20 点)

5. 次の行列の固有値とそれに対する固有空間を求めよ. (20 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$