

例題9 関数の導関数(1)

つぎの関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$ (2) $y = \cos(\sin x)$

(3) $y = e^{x^x} \quad (x > 0)$ (4) $y = \cos^{-1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Maple Ex

解答 (1) $y = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} = (x^2 + 1)^{2/3}$

$$y' = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

(2) $u = \sin x$ とおくと, $y = \cos u$. p.16 の定理 16 (合成関数の導関数) より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin u \cdot \cos x = -\sin(\sin x) \cdot \cos x$$

(3) $y = e^{x^x} \quad (x > 0)$ は $y = e^{(x^x)}$ という意味である. この両辺の対数をとると $\log y = x^x$. この両辺を x で微分すると $y'/y = (x^x)'$ となる.

$u = x^x$ とおき, u' を求める. そのためこの両辺の対数をとると $\log u = x \log x$. この両辺を x で微分すると $u'/u = \log x + 1$. よって $u' = x^x(\log x + 1)$.

$$\therefore y' = e^{x^x} \cdot x^x(\log x + 1)$$

$$(4) y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$= -\frac{x^2+1}{2x} \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2}{x^2+1} \quad (x > 0)$$

問題

9.1 つぎの関数の導関数を求めよ.

(1) e^{x^2} (2) $x^2 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \quad (-1 < x < 1, x \neq 0)$

(3) $\sqrt{x^2+1} \sqrt[3]{x^3+1}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (5) $\frac{x}{x - \sqrt{x^2+a^2}} \quad (a > 0)$

(6) $(\tan x)^{\sin x} \quad (0 < x < \pi/2)$ (7) $\log(x + \sqrt{x^2+1})$

9.2 つぎの関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right)$ (2) $y = \cos^{-1} \frac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$

(3) $y = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$

例題10 関数の導関数(2)

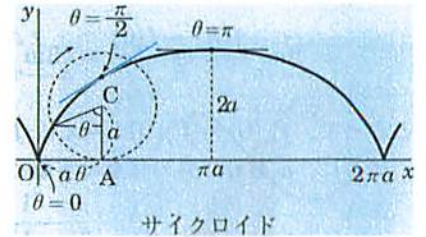
サイクロイド $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$ 上の $\theta = \frac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ. ただし $a > 0$ とする.

解答 p.17 の定理 18 (媒介変数を用いて表される関数の導関数) を用いる.

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta$$

よって, $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)}$

$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$



$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときは

$$x = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a, \quad y = a, \quad \frac{dy}{dx} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

したがって, 接線の方程式は

$$y - a = 1 \cdot \left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a\right\} \quad \text{よって, } y = x + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a$$

問題

10.1 つぎの関係から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ (結果は t の関数のままでよい).

15-2 (1) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0)$ (2) $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$

10.2 反曲線関数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ の導関数を求めよ.

6.2 像と核

• 像と核 •

f を R^n から R^m への線形写像とする.

像 $\text{Im } f = \{f(x); x \in R^n\}$ は R^m の部分空間でこれを像(空間)という. f の表現行列を $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ するとき

$$\text{Im } f = L\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ で生成される部分空間})$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im } f) = \text{rank } A = \text{rank}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

$y \in \text{Im } f \iff \text{rank}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ y] = \text{rank}[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ である. 一般に, V を R^n の部分空間とすると V の像

$$f(V) = \{f(x); x \in V\}$$

は R^m の部分空間である.

全射 $\text{Im } f = R^m$ のとき, 線形写像 f は全射であるという. このとき

$$y \in R^m \implies f(x) = y \text{ となる } x \in R^n \text{ が存在する.}$$

$$f \text{ が全射} \iff \text{rank } A = m$$

核 $\text{Ker } f = \{x \in R^n; f(x) = 0\}$ は R^n の部分空間であってこれを核(空間)という. このとき

$$\text{Ker } f = \{x; Ax = 0\} : \text{同次連立1次方程式 } Ax=0 \text{ の解空間}$$

$$\dim(\text{Ker } f) = n - \text{rank } A$$

である. 一般に, W を R^m の部分空間とすると, W の逆像

$$f^{-1}(W) = \{x \in R^n; f(x) \in W\}$$

も R^n の部分空間である.

単射 $\text{Ker } f = \{0\}$ のとき f を単射であるという. このとき

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

$$f \text{ が単射} \iff \text{rank } A = n$$

次元定理 $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = n$

• 線形写像と1次独立性 • $x_1, x_2, \dots, x_k \in R^n$ が1次独立でも $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)$ は1次独立とは限らないから, 線形写像 f は1次独立性を保持しないが,

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k) : 1 \text{ 次独立} \implies x_1, x_2, \dots, x_k : 1 \text{ 次独立}$$

が成り立つ.

とくに, f が単射ならば1次独立性は保持される, すなわち

$$x_1, x_2, \dots, x_k : 1 \text{ 次独立} \implies f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k) : 1 \text{ 次独立}$$

例題 4

像と核

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ とする. R^4 から R^3 への線形写像 f を $f(x) = Ax$ で与えるとき f の $\text{Im } f$ および $\text{Ker } f$ の次元と1組の基底を求めよ.

解答 右の表から $\dim(\text{Im } f) = \text{rank } A = 2$. $\text{Im } f$ は A の4個の列ベクトルで生成されるから, このうちの2個の1次独立なベクトルが $\text{Im } f$ の基底である. たとえば表から A の第1列と第2列は1次独立だから $\text{Im } f$ の1組の基底として $(1, -1, 2), (0, 1, 1)$ を採ることができる.

$\text{Ker } f$ は同次連立1次方程式 $Ax = 0$ の解空間だから, 表から次元は $\dim(\text{Ker } f) = 4 - \text{rank } A = 4 - 2 = 2$ であり, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから $(1, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)$ が $\text{Ker } f$ の1組の基底である.

A			
1	0	-1	-2
-1	1	2	3
2	1	-1	-3
1	0	-1	-2
0	1	1	1
0	1	1	1
1	0	-1	-2
0	1	1	1
0	0	0	0

See. P.52

see. p.24, 25
↑
22.

問題

4.1 つぎの行列を表現行列としてもつ線形写像 f の像空間および核空間を求めよ.

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ とする. R^4 から R^3 への線形写像を $f(x) = Ax$ で与えるとき, ベクトル $a = (1, -1, 1), b = (-2, 1, 7)$ に対し, a の逆像 $\{x \in R^4; f(x) = a\}$ および b の逆像 $\{x \in R^4; f(x) = b\}$ を求めよ.

例題 8

対角化

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が対角化可能ならば変換の行列を求めて対角化せよ。

解答 A の固有多項式は

$$\varphi(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(3-t)$$

だから、固有値は 1, 3 で代数的重複度はそれぞれ 2, 1 である。

右表から $\text{rank}(A - E) = 1$ だから固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ の次元 (幾何的重複度) は $\dim V(1) = 3 - \text{rank}(A - E) = 3 - 1 = 2$ で代数的重複度に一致する。

固有値 3 に関しては代数的重複度は 1 だから固有空間 $V(3)$ の次元も 1 である。各固有値に対して幾何的重複度と代数的重複度が一致するから A は対角化可能である。

固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ は表から

$$V(1) = L\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}, \quad \mathbf{x}_1 = {}^t[-1 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{x}_2 = {}^t[-1 \ 0 \ 1]$$

で $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が $V(1)$ の 1 組の基底である。

固有値 3 に対する固有空間 $V(3)$ に関しても表から

$$V(3) = L\{\mathbf{x}_3\}, \quad \mathbf{x}_3 = {}^t[1 \ 1 \ 0]$$

で \mathbf{x}_3 が $V(3)$ の基底である。 P.78

よって、 $P = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3]$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる。

注意 $\mathbb{R}^3 = V(1) \oplus V(3)$ である。

問題

8.1 つぎの行列 A が対角化可能ならば対角化せよ。

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

15-32

例題 9

べき零行列の対角化

A がべき零行列で、 $A \neq O$ とすると、 A は対角化可能でないことを示せ。

解答 A が対角化可能であるとすると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

となる正則行列 P が存在する。 A がべき零行列だから $A^k = O$ として、上式を k 乗すると

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

一方

$$(P^{-1}AP)^k = \overbrace{P^{-1}AP P^{-1}AP P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}^{k \text{ 個}} = P^{-1}A^k P = P^{-1}O P = O$$

だから

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

よって、

$$A = POP^{-1} = O$$

であるがこれは仮定に反する。

問題

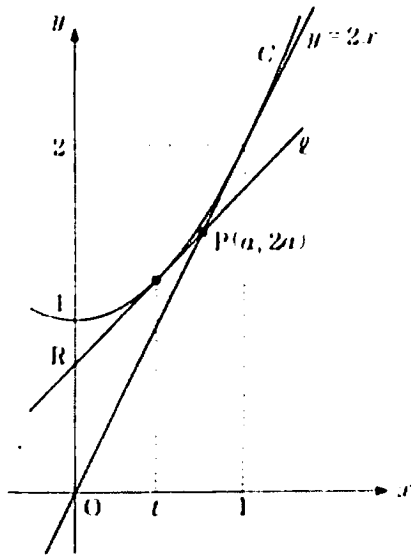
9.1 $A^2 = A$ ならば対角化可能で、 $\text{tr} A = \text{rank} A$ であることを示せ。

9.2 (a) n 次正方行列 A が相異なる n 個の正の固有値をもつとする。このとき、 $B^2 = A$ となる正方行列 B が存在することを示せ。

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ に対し $B^2 = A$ となる B を求めよ。

第2問 (数学II 微分・積分の考え)

<解説>



$$C: y = x^2 + 1, y' = 2x$$

(1) C上の点 $(t, t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$$

$$\iff y = 2tx - t^2 + 1 \quad \dots\dots ②$$

この接線が点 $P(a, 2a)$ を通るとき

$$2a = 2t \cdot a - t^2 + 1 \quad \dots\dots ③$$

$$\iff t^2 - 2at + 2a - 1 = 0$$

$$\iff (t - (2a - 1))(t - 1) = 0$$

$$\iff t = 2a - 1, 1$$

Pを通る接線が2本あるのは、 t の2次方程式③が異なる2つの実数解をもつときであるから

$$2a - 1 \neq 1 \iff a \neq 1$$

このとき、接線の方程式は②より

$t = 2a - 1$ のとき

$$y = 2(2a - 1)x - (2a - 1)^2 + 1$$

$$\iff y = (4a - 2)x - 4a^2 + 4a \quad \dots\dots ①$$

$t = 1$ のとき

$$y = 2x$$

(2) l (①) と y 軸の交点が $R(0, r)$ であるから

$$r = -4a^2 + 4a$$

であり、 $r > 0$ となるのは

$$-4a^2 + 4a > 0$$

$$\iff 4a(a - 1) < 0$$

$$\iff 0 < a < 1$$

このとき

$$S = \triangle OPR = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\text{Pの}x\text{座標})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-4a^2 + 4a) \cdot a$$

$$= 2(a^2 - a^3)$$

(駿台予備学校)

$$S' = 2(2a - 3a^2)$$

2017)

$$= -2a(3a - 2)$$

$0 < a < 1$ における S の増減表は、次のようになる。

a	(0)	\dots	$\frac{2}{3}$	\dots	(1)
S'		$+$	0	$-$	
S		\nearrow		\searrow	

よって、 S は $a = \frac{2}{3}$ のとき最大で

$$\text{最大値 } 2 \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^3 \right\} = \frac{8}{27}$$

(3) $0 < a < 1$ のとき、 $0 \leq x \leq a$ において、 C は l の上側 (または接する) にあるので

$$T = \int_0^a (x^2 + 1 - ((4a - 2)x - 4a^2 + 4a)) dx$$

$$= \int_0^a (x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 - 4a + 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - (2a - 1)x^2 + (4a^2 - 4a + 1)x \right]_0^a$$

$$= \frac{a^3}{3} - (2a - 1)a^2 + (4a^2 - 4a + 1)a$$

$$= \frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a$$

$$T' = 7a^2 - 6a + 1$$

$$= 7 \left(a - \frac{3}{7} \right)^2 - \frac{2}{7}$$

a の2次関数 T' の軸: $a = \frac{3}{7}$ について、 $\frac{3}{7} < \frac{2}{3}$ より、

$\frac{2}{3} \leq a < 1$ において T' は増加するので

$$T' \geq 7 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 6 \left(\frac{2}{3} \right) + 1 = \frac{1}{9} > 0$$

よって、この範囲で $T' > 0$ であるから、 T は増加する。(②)

(注) $T = \int_0^a (x^2 - 2(2a - 1)x + (2a - 1)^2) dx$

$$= \int_0^a (x - 2a + 1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} (x - 2a + 1)^3 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{3} ((-a + 1)^3 - (-2a + 1)^3)$$

$$= \frac{1}{3} (7a^3 - 9a^2 + 3a)$$

第 2 問

(1) $y = x^2 + 1$ より,

$$y' = 2x$$

よって、 $x = t$ での微分係数は $2t$ なので、
点 $(t, t^2 + 1)$ における C の接線の方程式は、

$$y = 2t(x - t) + t^2 + 1$$

すなわち、

$$y = \underline{2t}x - \underline{t^2} + \underline{1} \quad \dots\dots ② \quad \dots\dots \text{ア, イ}$$

この直線が $P(a, 2a)$ を通るとき、 $2a = 2t \cdot a - t^2 + 1$ より、

$$t^2 - \underline{2at} + \underline{2a} - \underline{1} = 0 \quad \dots\dots ③$$

を満たす。よって、③より、 $(t - 2a + 1)(t - 1) = 0$ となり、

$$t = \underline{2a - 1}, \underline{1} \quad \dots\dots ④$$

である。

ここで、 P を通る C の接線が 2 本あるのは、④で得られた 2 つの接点の x 座標、
 $2a - 1$ と 1 が異なるときである。

よって、

$$2a - 1 = 1$$

すなわち、

$$a \neq \underline{1}$$

であり、このとき、 P を通る 2 本の接線の方程式は、②に④の t の値を代入して、

$$y = 2(2a - 1)x - (2a - 1)^2 + 1$$

すなわち、

$$y = (\underline{4a - 2})x - \underline{4a^2} + \underline{4a} \quad \dots\dots ①$$

と

$$y = 2 \cdot 1x - 1^2 + 1$$

すなわち、

$$y = \underline{2}x$$

である。

(2) $r = -4a^2 + 4a$ であるから、 $r > 0$ となるのは、

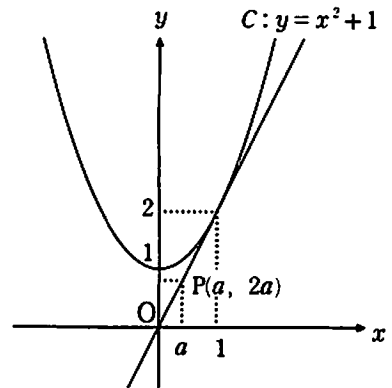
$$-4a^2 + 4a > 0$$

$$a(a - 1) < 0$$

より、

$$\underline{0} < a < \underline{1}$$

のときである。



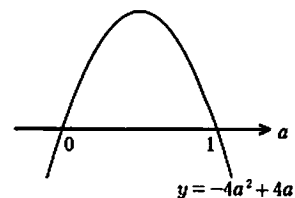
……ウ, エ, オ

……カ, キ, ク

……ケ

……コ, サ, シ, ス

……セ



このとき、 $\triangle OPR$ は、 OR を底辺と見たとき、高さが
 P の x 座標 a である三角形なので、その面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times (-4a^2 + 4a) \times a$$

$$= \underline{\underline{2(a^2 - a^3)}} \quad \dots\dots \text{チ, ツ, テ}$$

となる。

$$f(a) = 2(a^2 - a^3) \text{ とおくと,}$$

$$f'(a) = 2(2a - 3a^2)$$

$$= -6a \left(a - \frac{2}{3} \right)$$

であるから、 $0 < a < 1$ のとき、 $f(a)$ の増減は右下のようになる。

よって、 $S (= f(a))$ は $a = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ のとき、 $\dots\dots \text{ト, ナ}$

最大値

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right]$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{27}}}$$

をとる。

(3) 求める面積 T は右図の網目部分の面積で、

$$T = \int_0^a [x^2 + 1 - \{(4a-2)x - 4a^2 + 4a\}] dx$$

$$= \int_0^a \{x^2 - (4a-2)x + 4a^2 - 4a + 1\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - (2a-1)x^2 + (4a^2 - 4a + 1)x \right]_0^a$$

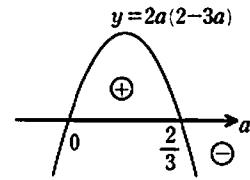
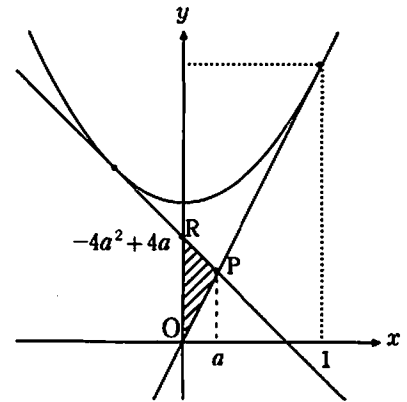
$$= \frac{1}{3}a^3 - (2a-1)a^2 + (4a^2 - 4a + 1)a$$

$$= \underline{\underline{\frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a}} \quad \dots\dots \text{ノ, ハ, ヒ, フ}$$

よって、

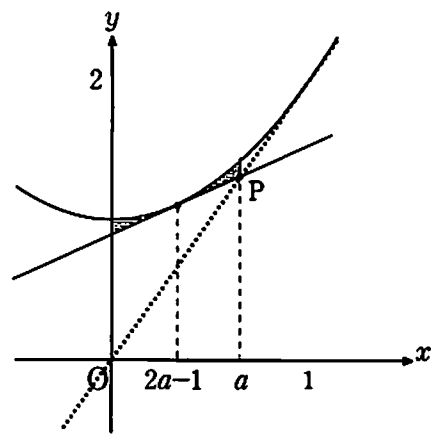
$$g(a) = \frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a$$

とおくと、



a	0	...	$\frac{2}{3}$...	1
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗		↘	

$\dots\dots \text{ニ, ヌネ}$



$$g'(a) = 7a^2 - 6a + 1$$

ここで、 $g'(a) = 0$ となる a は $a = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}$ であり、

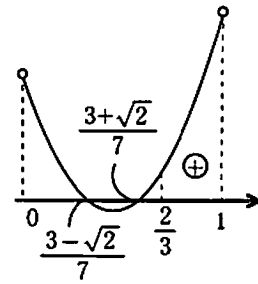
$$\frac{2}{3} - \frac{3 + \sqrt{2}}{7} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{21} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{18}}{21} > 0$$

であるから、

$$\frac{2}{3} \leq a < 1 \text{ で } g'(a) > 0$$

よって、 $T(=g(a))$ は $\frac{2}{3} \leq a < 1$ で増加する。

(.....②)



.....^

(注) T の計算を行うには、数学Ⅲの範囲の計算であるが、

$$\int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を用いる方法もあり、接線と囲む面積を求める際に特に有用である。

$$l: y = (4a-2)x - 4a^2 + 4a$$

は、 C の $x = 2a-1$ における接線なので、

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 - \{(4a-2)x - 4a^2 + 4a\} \\ &= x^2 - 2(2a-1)x + (2a-1)^2 \\ &= \{x - (2a-1)\}^2 \end{aligned}$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \{x - (2a-1)\}^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \{x - (2a-1)\}^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}(-a+1)^3 - \frac{1}{3}(-2a+1)^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{7}{3}a^3 - 3a^2 + a}} \end{aligned}$$

.....ノ、ハ、ヒ、フ