

情報科学科 数式処理実習ペア試験問題

全部で4問。資料を参考にして以下の問題を python で解き，グループごとに1部出力して提出せよ。全員の名前を忘れんように。60点以上が合格。何番をやっているかが分かるようにせよ。

1. (a) 微分 (15点)

次の関数を微分せよ。

$$\sin^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

ただし，`x = symbols('x', positive = True)` で変数の値を制約しておくこと，式がとても簡単になる。

- (b) 2重積分 (15点) 次の2重積分を資料を参考にして求めよ。

$$\iint_D \sqrt{x^2 + 4y^2} dx dy, \quad D : 0 \leq x \leq y \leq 1$$

2. (a) 写像の Im, Ker (15点)

次の変換の行列 A で表される写像 f の Im, Ker のそれぞれの次元と1組の基底を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) 行列の対角化 (15点)

次の行列 A を対角化する変換の行列 P を求めて，対角化しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) (10点) O を原点とする座標平面上の放物線 $y = x^2 + 1$ を C とし, 点 $(a, 2a)$ を P とする.

点 P を通り, 放物線 C に接する直線の方程式を求めよう.

C 上の点 $(t, t^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}} tx - t^2 + \boxed{\text{イ}}$$

である. この直線が P を通るとすると, t は方程式

$$t^2 - \boxed{\text{ウ}} at + \boxed{\text{エ}} a - \boxed{\text{オ}} = 0$$

を満たすから, $t = \boxed{\text{カ}} a - \boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ である. よって, $a \neq \boxed{\text{ケ}}$ のとき, P を通る C の接線は 2 本あり, それらの方程式は,

$$y = \left(\boxed{\text{コ}} a - \boxed{\text{サ}} \right) x - \boxed{\text{シ}} a^2 + \boxed{\text{ス}} a \quad (1)$$

と

$$y = \boxed{\text{セ}} x$$

ある¹.

- (b) (20点) 問 3-(a) において, 放物線 C を $y = x^2 + 2$, 点 P を $(a, \sqrt{8}a)$ と読み替えて, t の値を求めよ.

4. 問 3-(a) の続き²(10点)

(a) の方程式 (1) で表される直線を l とする. l と y 軸との交点を $R(0, r)$ とすると, $r = -\boxed{\text{シ}} a^2 + \boxed{\text{ス}} a$ である. $r > 0$ となるのは, $\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のときであり, このとき, 三角形 OPR の面積 S は

$$S = \boxed{\text{チ}} \left(a^{\boxed{\text{ツ}}} - a^{\boxed{\text{テ}}} \right)$$

となる.

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき, S の増減を調べると, S は $a = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ で最大値 $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$

をとることがわかる.

$\boxed{\text{ソ}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき, 放物線 C と直線 l および 2 直線 $x = 0, x = a$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} a^3 - \boxed{\text{ヒ}} a^2 + \boxed{\text{フ}}$$

である. $\frac{2}{3} \leq a < 1$ の範囲において T は単調増加する.

¹2017 年度大学入試センター試験数学 II・B 本試験第 2 問 (a)

²2017 年度大学入試センター試験数学 II・B 本試験第 2 問 (b,c)