演習と応用線形代数，寺田文行，木村信昭著，サイエンス社2005.
t

例題 2 直交行列の標準形

直交行列 $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$ の標準形を求めよ．

解答 A の固有方程式は $|A - tE| = -(t+1)\left(t^2 - \dfrac{5}{3}t + 1\right)$ だから固有値は $-1,\ (5 \pm \sqrt{11}\,i)/6$ である．

-1 に対する単位固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = {}^t[\,-1/\sqrt{11} \quad -1/\sqrt{11} \quad 3/\sqrt{11}\,]$$

$(5 \pm \sqrt{11}i)/6$ に対する単位固有ベクトルとして

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= {}^t[\,(3 \mp \sqrt{11}\,i)/2\sqrt{11} \quad (3 \pm \sqrt{11}\,i)/2\sqrt{11} \quad 1/\sqrt{11}\,] \\ &= {}^t[\,3/2\sqrt{11} \quad 3/2\sqrt{11} \quad 1/\sqrt{11}\,] \pm i\,{}^t[\,1/2 \quad -1/2 \quad 0\,] \\ &= \boldsymbol{s} \pm i\boldsymbol{t} \quad (\text{とおく．} \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \text{ は実ベクトル}) \end{aligned}$$

を得る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_2 &= \sqrt{2}\boldsymbol{s} = {}^t[\,3/\sqrt{22} \quad 3/\sqrt{22} \quad 2/\sqrt{22}\,] \\ \boldsymbol{p}_3 &= \sqrt{2}\boldsymbol{t} = {}^t[\,1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0\,] \end{aligned}$$

とし $P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{11} & 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{11} & 2/\sqrt{22} & 0 \end{bmatrix}$ とおくと

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -\sqrt{11}/6 \\ 0 & \sqrt{11}/6 & 5/6 \end{bmatrix}$$

となる．これが求める標準形である．

問 題

2.1 つぎの直交行列 A の標準形を求めよ．

(a) $\begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 7/9 \\ 8/9 & 1/9 & -4/9 \\ 1/9 & 8/9 & 4/9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

例題 3 同時対角化

実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ について

(a) $AB = BA$ を確かめよ．

(b) A, B を直交行列 P によって同時に対角化せよ．

解答 (a) $AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} = BA$ である．

(b) A の固有多項式は $|A - tE| = (t-2)(t+3)$, B の固有多項式は $|B - tE| = (t-4)(t+1)$ だから A の固有値は $2, -3$, B の固有値は $4, -1$ である．
A の固有値 2 に対する固有ベクトルは $(A - 2E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて $\boldsymbol{x}_1 = {}^t[2 \quad 1]$, 固有値 -3 に対する固有ベクトルは $(A + 3E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて $\boldsymbol{x}_2 = {}^t[-1 \quad 2]$. このとき

$$\begin{aligned} B\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{x}_1 \\ B\boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{x}_1/|\boldsymbol{x}_1| = {}^t[\,2/\sqrt{5} \quad 1/\sqrt{5}\,] \\ \boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{x}_2/|\boldsymbol{x}_2| = {}^t[\,-1/\sqrt{5} \quad 2/\sqrt{5}\,] \end{aligned}$$

と正規化して $P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2] = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ とおくと

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad {}^tPBP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

と同時に対角化される．

注意 実対称行列 A, B が同時に直交行列によって対角化されるための必要十分条件は $AB = BA$ である．

問 題

3.1 つぎの 2 つの実対称行列を直交行列 P によって同時に対角化せよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7.2　2 次形式

2 次形式　$A=[a_{ij}]$ を n 次実対称行列，$\boldsymbol{x}={}^t[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$ を n 次元列ベクトルとするとき

$$f={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

を変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ に関する **2 次形式**という．

変数変換　正則行列 (または直交行列)P を用いて変数変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ を行なうと 2 次形式 f は $f={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}$ と書き換えられる．

標準形　A の正の固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, 負の固有値を $\mu_1,\ldots,\mu_q$ $(p+q=\mathrm{rank}\,A)$ とする．P を変換の直交行列として

$${}^tPAP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&\lambda_p&&&&&\\&&&-\mu_1&&&&\\&&&&\ddots&&&\\&&&&&-\mu_q&&\\&&&&&&0&\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&0\end{bmatrix}$$

と対角化して，

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{y}={}^t[y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$$

と変数変換をすれば

$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_py_p^2-\mu_1y_{p+1}^2-\cdots-\mu_qy_{p+q}^2$$

となる．これを 2 次形式 f の**標準形**という．

シルベスターの慣性律　2 次形式の標準形における正項の個数 p, 負項の個数 q は変数変換の選び方によらない．これを**シルベスターの慣性律**という．(p,q) を f の**符号**という．

正値 2 次形式　2 次形式 f が正値である　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{x}(\neq\boldsymbol{0})$ に対して $f(\boldsymbol{x})>0$

$\Longleftrightarrow$　固有値がすべて正 (符号が $(n,0)$)

例題 4　―――　**2 次形式の変数変換**

2 次形式

$$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3-2x_1x_3$$

を行列 $P=\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ によって変数変換せよ．

解答　f は $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$ とおくと $f={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ と表される．

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

と変数変換をすれば

$$\begin{aligned}f&={}^t(P\boldsymbol{y})AP\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}\\&=[\,y_1\ \ y_2\ \ y_3\,]\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\\&=[\,y_1\ \ y_2\ \ y_3\,]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\\&=y_1^2+y_2^2-2y_3^2\end{aligned}$$

となる．

問　題

4.1　つぎの 2 次形式を行列を用いて表せ．

(a)　$2x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2$

(b)　$x_1^2-3x_2^2+x_1x_2-x_2x_3+2x_1x_3$

(c)　$x_2x_3+x_1x_3$

4.2　$\begin{bmatrix}2&3&-1\\3&1&4\\-1&4&5\end{bmatrix}$ を行列にもつ x_1,x_2,x_3 に関する 2 次形式をかけ．

寺田・坂田, 「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

例題 9 — 関数の導関数 (1)

つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ (2) $y = \cos(\sin x)$

Maple Ex

(3) $y = e^{x^x}$ $(x > 0)$ (4) $y = \cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

解答 (1) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2} = (x^2+1)^{2/3}$

$$y' = \frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}\cdot 2x = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}$$

(2) $u = \sin x$ とおくと，$y = \cos u$．p.16 の定理 16（合成関数の導関数）より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\sin u\cdot\cos x = -\sin(\sin x)\cdot\cos x$$

(3) $y = e^{x^x}$ $(x > 0)$ は $y = e^{(x^x)}$ という意味である．この両辺の対数をとると $\log y = x^x$．この両辺を x で微分すると $y'/y = (x^x)'$ となる．

$u = x^x$ とおき，u' を求める．そのためこの両辺の対数をとると $\log u = x\log x$．この両辺を x で微分すると $u'/u = \log x + 1$．よって $u' = x^x(\log x + 1)$．

$$\therefore\quad y' = e^{x^x}\cdot x^x(\log x + 1)$$

(4) $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$= -\frac{x^2+1}{2x}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)} = -\frac{2}{x^2+1}\quad (x > 0)$$

問 題

9.1 つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) e^{x^2} (2) $x^2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ $(-1 < x < 1,\ x \neq 0)$

15-2

(3) $\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}$ (4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (5) $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a > 0)$

(6) $(\tan x)^{\sin x}$ $(0 < x < \pi/2)$ (7) $\log(x + \sqrt{x^2+1})$

9.2 つぎの関数の導関数を求めよ．

15-1

(1) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (2) $y = \cos^{-1}\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$

(3) $y = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

例題 10 — 関数の導関数 (2)

サイクロイド $\left.\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1-\cos\theta)\end{aligned}\right\}$ 上の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ．

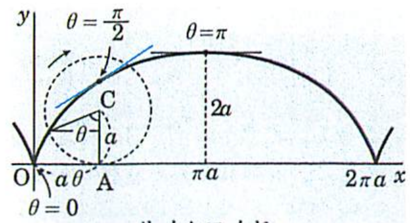
ただし $a > 0$ とする．

解答 p.17 の定理 18（媒介変数を用いて表される関数の導関数）を用いる．

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

よって，$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$



サイクロイド

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$x = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a,\quad y = a,\quad \frac{dy}{dx} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

したがって，接線の方程式は

$$y - a = 1\cdot\left\{x - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a\right\}\quad よって，\quad y = x + \left(2-\frac{\pi}{2}\right)a$$

問 題

10.1 つぎの関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ（結果は t の関数のままでよい）．

15-2

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\end{cases}$ $(a > 0)$ (2) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t^3\end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t)\end{cases}$ $(a > 0)$

10.2 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ の導関数を求めよ．

教学社
2017年版センター試験過去問研究
数学ⅠA・ⅡB

第1問 ── 整式の計算，2次方程式，命題，必要条件・十分条件

〔1〕 易 《整式の計算，2次方程式》

(1)
$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=1^2-2\cdot(-2)=\boxed{5}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$
$$=\frac{-2}{-1}=\boxed{2}$$

次に
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

ここで
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{-1}=-1$$

よって
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$
$$=2^2-2\cdot(-1)=\boxed{6}$$

(2)
$$A=\left(ax-\frac{1}{a}\right)^2+\left(bx-\frac{1}{b}\right)^2+\left(cx-\frac{1}{c}\right)^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)x^2-6x+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$=\boxed{5}x^2-\boxed{6}x+\boxed{6}$$

よって，$A=7$ のとき
$$5x^2-6x+6=7 \qquad 5x^2-6x-1=0$$
$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{3^2+5}}{5}=\frac{\boxed{3}\pm\sqrt{\boxed{14}}}{\boxed{5}}$$

解説

(1) 使われる公式は
$$(p+q+r)^2=p^2+q^2+r^2+2(pq+qr+rp)$$
である。

(2) 前半では，与えられた式を展開し，(1)の結果をあてはめる。
後半では，2次方程式の解の公式を使う。

〔2〕 やや難 《命題，必要条件・十分条件》

(1) $\overline{q}$：$ab^2<0$ である。また，$b^2\geqq 0$ を考慮すると
$$ab^2<0 \Longleftrightarrow a<0 \text{ かつ } b^2>0$$
である。さらに，$b^2>0$ は $b\neq 0$ と同値である。

よって，$\overline{q}$ と同値な条件は，「$a<0$ かつ $b\neq 0$」（$\boxed{③}$）である。

(2) (i) $a+b\geqq 0$ のとき，$|a+b|=a+b$ である。ゆえに，p より
$$a+b=|a|+b \qquad |a|=a \qquad \therefore\quad a\geqq 0 \quad (\boxed{①})$$

(ii) $a\geqq 0$ のとき，$|a|=a$ である。ゆえに，p より
$$|a+b|=a+b \qquad \therefore\quad a+b\geqq 0 \quad (\boxed{①})$$

(iii) $a+b<0$ のとき
$$p \Longleftrightarrow -a-b=|a|+b$$
$$\Longleftrightarrow |a|+a=-2b \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

である。そこで，まず p（すなわちⒶ）を仮定する。p が成り立つときは，(ii)が成立するから，その対偶も成立して，$a+b<0$ より $a<0$ である。ゆえに，$|a|+a=0$ となり，Ⓐより $b=0$ が成り立つ。すなわち，$p\Longrightarrow b=0$ が成り立つ。

次に，$b=0$ を仮定する。そのとき $a+b<0$ より $a<0$ となるから，Ⓐは $0=0$ となって成り立つ。すなわち，$b=0\Longrightarrow p$ が成り立つ。

以上より，$a+b<0$ のとき
$$p\Longleftrightarrow b=0 \quad (\boxed{②})$$

(3) (1)より
$$q\Longleftrightarrow \overline{a<0 \text{ かつ } b\neq 0}$$
$$\Longleftrightarrow a\geqq 0 \text{ または } b=0 \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

また(2)より，p が成り立つとき
$$(a+b\geqq 0 \text{ かつ } a\geqq 0) \quad \cdots\cdots Ⓒ$$
または
$$(a+b<0 \text{ かつ } b=0) \quad \cdots\cdots Ⓓ$$

が成り立つ。Ⓒ，Ⓓいずれの場合もⒷを満たすから，$p\Longrightarrow q$ は成立する。

逆に，q（すなわちⒷ）が成り立っても，たとえば $a=0$，$b=-1$ のとき（このときⒸもⒹも成り立たない）
$$|a+b|=1, \quad |a|+b=-1$$
となり，p は成立しない。よって，$q\Longrightarrow p$ は成立しない。

以上より，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない（$\boxed{①}$）。