

情報科学科 数式処理実習ペア試験問題

全部で3問(×2). 資料を参考にして以下の問題を Maple で解き, 出力して提出せよ. 60 点以上が合格. 何番をやっているかが分かるようにせよ.

1. (a) パラメトリックプロットと微分 (15 点)

資料を参考にして次の関係を満たすグラフを $t = -2\pi..2\pi$ でプロットせよ. さらに, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. 結果は t の関数のままでよい¹.

$$\begin{aligned}x &= \cos(t) + t \sin(t) \\y &= \sin(t) - t \cos(t)\end{aligned}$$

(b) 直交関数系の積分 (15 点)

以下の関数 $f_{1,1}, f_{2,3}$ を $x = -\pi..pi$ でプロットし, さらにその範囲で積分せよ.

$$\begin{aligned}f_{1,1} &= \sin x \sin x \\f_{2,3} &= \sin 2x \sin 3x\end{aligned}$$

さらに, 以上の結果を一般化すると

$$F_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

が成立する. その理由をプロットから定性的に説明せよ. ただし, $n = m$ で定量的に π になることの説明を解として求めているのではない.

2. (a) 同時対角化 (15 点)

実対称行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について,

- i. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ を確かめよ.
- ii. \mathbf{A}, \mathbf{B} を直交行列 \mathbf{P} によって同時に対角化せよ².

(b) 2次形式 (15 点)

2次形式

$$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

を行列 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ によって変数変換せよ³.

¹寺田・坂田,「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003), p.19, 問題 10.1(2).

²寺田・木村,「演習と応用 線形代数」(サイエンス社,2005), p.117, 例題 3, 問題 3.1

³寺田・木村,「演習と応用 線形代数」(サイエンス社,2005), p.119, 例題 4 改, p.120 5.1(a)

3. (a) (10点) 定数 a, b, c は, $a + b + c = 1$, $ab + bc + ca = -2$, $abc = -1$ を満たすとする.

i. $a^2 + b^2 + c^2 = \boxed{\text{ア}}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \boxed{\text{イ}}$ である.

次に, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \boxed{\text{イ}}$ の両辺を 2 乗することで

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \boxed{\text{ウ}}$$

であることがわかる.

- ii. x の 2 次式 A を

$$A = \left(ax - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(bx - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(cx - \frac{1}{c}\right)^2$$

とおく.

$$A = \boxed{\text{エ}}x^2 - \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}$$

であり, $A = 7$ を満たす x の値は $\frac{\boxed{\text{キ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である⁴.

- (b) (30点) 問 3-(a) において, $a + b + c = 1.1$, $ab + bc + ca = -2.2$, $abc = -1.1$ を満たすと読み替えて, $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{コ}}$ を求めよ. ただし数値を変えたので,

$\boxed{\text{ア}}$ 等には箱にこだわらず, 小数が入る. さらに, $\frac{\boxed{\text{キ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ は浮

動小数点数 2 個となる.