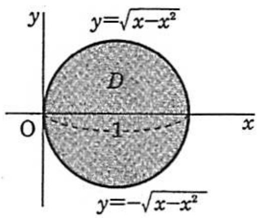
例題1 ── **2重積分 (1)**

(1)　つぎの2重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy, \quad D : x^2+y^2 \leqq x$$

(2)　$f(x,y)=1$ のとき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は D の面積に等しいことを示せ．

解答　(1)　$x^2+y^2=x$ は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形することによって，中心が $(1/2,0)$ で半径が $1/2$ の円である．D はこの円の周および内部である．この D を x に関する単純な領域と考える (p.86)．よって，



$$I=\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\,dy$$

$$=\int_0^1 [\sqrt{x}y]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

いま，$\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$．よって

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=2\int_1^0 (1-t^2)t(-2t)dt$$

$$=4\int_0^1 (t^2-t^4)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

(2)　p.85 の2重積分の定義(1)により，$f(x,y)=1$ のとき $f(x_i,y_i)\Delta S_i=\Delta S_i$ である．よって

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=D\text{ の面積}$$

問　題

1.1　つぎの2重積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D : y-\frac{1}{4}x^2 \geqq 0,\ y-x \leqq 0,\ x \geqq 2$

(2)　$\displaystyle\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy, \quad D : 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 10y$

例題2 ── **2重積分 (2)**

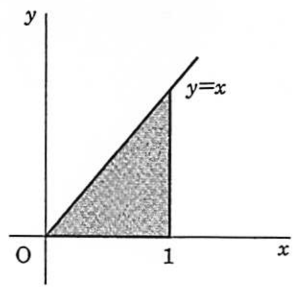
(1)　つぎの2重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad D : 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$$

(2)　曲面 $z=e^{px+qy}$　$(pq \fallingdotseq 0)$

が xy 平面の正方形 $D=\{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ との間につくる立体の体積を求めよ．

解答　(1)　右図を x に関する単純な領域とみる．p.35 の不定積分の公式(7)より，



$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy$$

$$=\int_0^1 \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2x}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\frac{\pi}{6}\right)dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2)　$I=\displaystyle\iint_D e^{px}\cdot e^{qy}\,dx\,dy$ で変数に関して分離された形である．p.87 の(10)より

$$I=\left(\int_0^1 e^{px}dx\right)\left(\int_0^1 e^{qy}dy\right)=\left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^1\cdot\left[\frac{e^{qx}}{q}\right]_0^1=\frac{e^p-1}{p}\cdot\frac{e^q-1}{q}$$

問　題

2.1　つぎの2重積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D : 1 \leqq y \leqq x \leqq 2$

(2)　$\displaystyle\int_0^\pi \left\{\int_0^{1+\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right\}d\theta$　(p.65 の図を参照)

(3)　$\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy, \quad D : \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1$　(p.53 の上図を参照)

7.3 2 次 曲 線

座標変換 直交座標系 $\{O; e_1, e_2\}$ を新座標系 $\{O'; e_1', e_2'\}$ に変換するとき

$$\begin{cases} e_1' = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 \\ e_2' = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 \end{cases} \quad \left(P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \text{は直交行列} \right)$$

とし O' の旧座標系に関する成分を (x_0, y_0) とする．点 P の旧座標系に関する成分を (x, y), 新座標系に関する成分を (x', y') とすると

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．これを平面の座標変換の式という．

2 次曲線 平面において，直交座標系に関して x, y の方程式

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

で表される図形を 2 次曲線という．

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とおくと，方程式は

$$^tXAX = 0 \quad \text{あるいは} \quad {}^t\boldsymbol{x}Q\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0$$

と表される．

主軸変換 座標系を変換して標準形を導くことを主軸変換という．2 次曲線は主軸変換によって，つぎの標準形のいずれかになる．

rank Q	rank A	det Q	標準形	曲線の種類	
2 (有心)	3	$\det Q > 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	楕円	固有
			$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = -1$	虚楕円	
		$\det Q < 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	双曲線	固有
	2	$\det Q > 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$	1 点	退化
		$\det Q < 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$	交わる 2 直線	退化
1 (無心)	3	$\det Q = 0$	$y^2 = 4px, \ (p > 0)$	放物線	固有
	2		$y^2 = \alpha^2$	平行 2 直線	退化
			$y^2 = -\alpha^2$	虚平行 2 直線	
	1		$y^2 = 0$	1 直線	退化

例題 7 ——— 2 次曲線の標準形 (1)

つぎの 2 次曲線の標準形を求めよ．

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 10x - 2y - 7 = 0$$

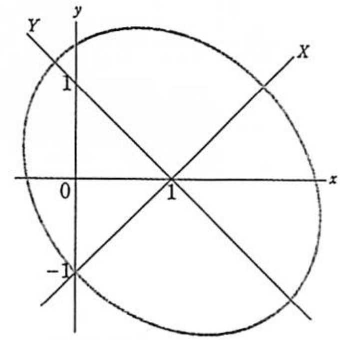
【解答】 与えられた 2 次方程式は

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とおくと

$$^t\boldsymbol{x}Q\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 7 = 0$$

である．



Q の固有多項式は $|Q - tE| = (6-t)(4-t)$ だから固有値は 6, 4 である．これらの固有値に対する単位固有ベクトルを求めるとそれぞれ

$$^t[1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}], \quad {}^t[-1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}]$$

を得るので $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ とおき，座標変換 ($\pi/4$ の回転) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を行なうと

$$^t\boldsymbol{y}{}^tPQP\boldsymbol{y} + 2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{y} - 7 = 0$$

$$\therefore \quad 6(x')^2 - 6\sqrt{2}x' + 4(y')^2 + 4\sqrt{2}y' - 7 = 0$$

$$\therefore \quad 6(x' - 1/\sqrt{2})^2 + 4(y' + 1/\sqrt{2})^2 - 12 = 0$$

を得る．さらに，座標の平行移動 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ を行なうと

$$6X^2 + 4Y^2 = 12, \quad \text{すなわち} \quad \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{3} = 1$$

となる．これは楕円である．

【注意】 標準形を得る座標変換の式は $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

問 題

7.1 つぎの 2 次曲線の標準形を求めよ．

(a) $3x^2 + 4xy + 6y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

(b) $4x^2 + 12xy + 4y^2 - 12x - 8y + 9 = 0$

(c) $4x^2 - 6xy - 4y^2 + 7x + 6y - 2 = 0$