

4.3 高次偏導関数, テーラーの定理と2変数関数の極値

・高次偏導関数。関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ はまた x, y の関数であるから, これらの偏導関数も考えられる。これらを $f(x, y)$ の2次偏導関数という。2次偏導関数にはつぎの4つがある。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

これらをそれぞれ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

で表す。さらに3次, 4次...の偏導関数も考えられるが, 2次以上の偏導関数をまとめて高次偏導関数という。

2次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} は必ずしも一致しない (p.76の例題5参照) が, つぎのことが成り立つ。

定理11 (偏微分の順序変換) $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ が連続ならば,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

一般に高次偏導関数の連続性を仮定すれば, その偏微分の順序は問題にならない。

・偏微分作用素。 a, b が定数のとき, 関数に作用する偏微分作用素 $a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ を

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = a \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

と定義する。

いま, $z = f(x, y), x = a + ht, y = b + kt$ で, $f(x, y)$ が必要な回数だけ連続な偏導関数をもてば, p.71の定理9より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(a + ht, b + kt) &= hf_x(a + ht, b + kt) + kf_y(a + ht, b + kt) \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a + ht, b + kt) \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots \frac{d^n}{dt^n} f(a + ht, b + kt) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + ht, b + kt)$$

・テーラーの定理。1変数の場合には, 高次導関数をもつ関数についてテーラーの定理が成り立った。2変数の関数についても高次偏導関数をもつ関数についてつぎの定理が成り立つ。

定理12 (テーラーの定理) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) を含む領域 D で n 次までの連続な偏導関数をもてば, $(a + h, b + k) \in D$ のとき,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

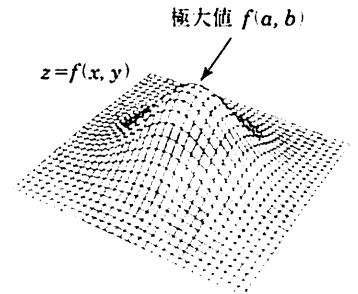
となる θ が存在する。
とくに $n = 1$ のときは,

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = hf_x(a + \theta h, b + \theta k) + kf_y(a + \theta h, b + \theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

となるが, これを2変数関数の平均値の定理という。

また上の定理で $(a, b) = (0, 0)$ とし, h, k の代わりに x, y としたときは, マクローリンの定理という。

・2変数関数の極値。 $z = f(x, y)$ を点 (a, b) に近い点で考えたとき, 点 (a, b) と異なるすべての点 (x, y) に対して, $f(a, b) > f(x, y)$ ならば $f(x, y)$ は点 (a, b) で極大で $f(a, b)$ を極大値という。極小値についても同様である。極大値, 極小値をあわせて極値という。



偏微分可能な関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとれば $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ である。この関係を満足する点で $f(x, y)$ が極値をとるかどうかはつぎの定理を用いて判定する。

定理13 (極値の判定) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において連続な2次偏導関数をもち, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ であるとする。

$$D = \{f_{xy}(a, b)\}^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$$

とおくとき, つぎのことが成り立つ。

- (i) $D < 0, f_{xx}(a, b) > 0$ ならば $f(a, b)$ は極小値
 $D < 0, f_{xx}(a, b) < 0$ ならば $f(a, b)$ は極大値
- (ii) $D > 0$ のときは $f(a, b)$ は極値でない。

例題 7

2変数の関数の極値

つぎの関数の極値をもとめよ.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

【解答】 p. 75 の定理 13 を用いる.

$f_x = 3x^2 - 3y, f_y = 3y^2 - 3x$ であるので, $f_x = 0, f_y = 0$ を解く. つまり,

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \cdots \textcircled{1} \\ y^2 - x = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{ を満足する } x, y \text{ を求める.}$$

②より $y^2 = x$ となり, これを①に代入すると, $y^4 - y = 0$. これを因数分解して, $y(y-1)(y^2+y+1) = 0$. $y^2+y+1 = (y+1/2)^2 + 3/4 > 0$ であるので $y = 0, 1$.

これらを②に代入すると, つぎのような 2組の解を得る.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

つぎに, $f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{xy} = -3$ であるから

$$D(0, 0) = f_{xy}^2(0, 0) - f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) = (-3)^2 - 0 \times 0 = 9 > 0$$

となるので点 $(0, 0)$ は極値ではない.

$$D(1, 1) = f_{xy}^2(1, 1) - f_{xx}(1, 1) \times f_{yy}(1, 1) = (-3)^2 - 6 \times 6 = -27 < 0$$

$$f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$$

であるので, $f(1, 1) = -1$ は極小値である.

問題

7.1 つぎの関数の極値を求めよ.

$$(1) f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

$$(2)^* f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

7.2 つぎの関数の極値を吟味せよ.

$$(1) f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y) \quad (0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi)$$

$$(2)^* f(x, y) = 2x^4 - 5x^2y + 2y^2$$

注意 7.1, 7.2 ともに計算が長くなるので途中で投げ出さないこと.

* p. 75 の定理 13 は $D = 0$ のときは使えない. このとき $f(a, b)$ は極値のときもあり, 極値でないこともある. 2次偏微分係数だけでは極値かどうか判定できないので他の方法を考えなくてはならない. 7.1 (2), 7.2 (2) の場合のように判定できるものもあるが一般には容易ではない.

4.4 陰関数の存在定理, 陰関数の極値, 包絡線

○陰関数○ 変数 x, y の間に $f(x, y) = 0$ という関係があるとき, これを一価関数 $y = g(x)$ の形に簡単に書き直せる場合もあるが必ずしもそうでないこともある.

たとえば円の方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ などは $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ と直せるが一価ではないし, $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ はそれも難しい.

そこで $f(x, y) = 0$ の形のままで y を x の関数といえるように, x に対して y が 2つ以上定まることを防いだり, 微分可能性のためにつぎの定理のような条件をつけて考える. なお $y = g(x)$ が $f(x, g(x)) = 0$ をみたすとき, $y = g(x)$ を $f(x, y) = 0$ で定義された陰関数という.

定理 14 (陰関数の存在定理) 関数 $f(x, y)$ は点 (a, b) を含む領域で連続な偏導関数を持ち,

$$(1) \begin{cases} f(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) \neq 0 \end{cases}$$

と仮定すると, $x = a$ を含むある区間を定義域とする関数 $y = g(x)$ でつぎの条件をみたすものが一意に定まる.

$$(2) \begin{cases} g(a) = b \\ f(x, g(x)) = 0 \\ g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \end{cases}$$

さらに, $f(x, y)$ が連続な 2次偏導関数をもてば, 次式が得られる.

$$(3) g''(x) = -\frac{(f_y)^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (f_x)^2 f_{yy}}{(f_y)^3}$$

○陰関数の極値○ $f(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = g(x)$ の極値を求めるためには,

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = 0, \quad f(x, y) = 0$$

をみたす点 (x, y) を求め, この点における $g''(x)$ の符号をみればよいが $g'(x) = 0$ のときは $f_x(x, y) = 0$ であるから問題にしている点では, 上の (3) よりつぎの式を得る.

$$(4) g''(x) = -f_{xx}(x, y)/f_y(x, y)$$

ここでは, 簡単のために y が x の関数で表される場合のみ扱ったが, x と y の関係は対称的であるから, $f_x(a, b) \neq 0$ ならば, 点 (a, b) の近くで, $x = h(y)$ の形の陰関数をもつことがわかる.

2.3 同次連立1次方程式の基本解

●同次連立1次方程式● 連立1次方程式の定数項がすべて0のもの:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

すなわち $Ax = 0$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

自明解 同次連立1次方程式の解である $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, すなわち $x = 0$.

非自明解 同次連立1次方程式の自明解以外の解.

非自明解をもつ $\iff \text{rank } A < n \iff A$ は正則でない

基本解 同次連立1次方程式が非自明解をもつとき, 非自明解のうち $n - r$ 個 ($r = \text{rank } A$) のベクトル x_1, x_2, \dots, x_{n-r} (n 次元列ベクトル) で,

$$\text{rank}[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n-r}] = n - r$$

となるもの.

一般解 x_1, x_2, \dots, x_{n-r} を1組の基本解とすると, 任意の解 x は,

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-r} x_{n-r} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r} \text{ は任意定数})$$

と表せる. この右辺の形を x_1, x_2, \dots, x_{n-r} の1次結合といい, 任意定数(パラメータ)を含む解を一般解という.

注意 x_1, x_2 が同次連立1次方程式の解ならば, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ も解である.

●非同次連立1次方程式●

同伴な同次連立1次方程式 連立1次方程式 $Ax = b(b \neq 0)$ に対し, $Ax = 0$.

特殊解 $Ax = b$ のパラメータを含まない解.

非同次連立1次方程式の一般解 x_0 を $Ax = b$ の特殊解とすると, $Ax = b$ の一般解は, つぎのように表せる.

$$\begin{aligned} x &= (\text{特殊解}) + (\text{同伴な同次連立1次方程式の一般解}) \\ &= x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-r} x_{n-r} \end{aligned}$$

注意 非同次連立1次方程式の一般解を, 特殊解と同伴な同次連立1次方程式の基本解の1次結合の和として表わす仕方は一意的でない.

例題5 特殊解と基本解

つぎの連立1次方程式を解き, 一般解を特殊解と同伴な同次連立1次方程式の基本解の1次結合の和の形で表せ.

$$\begin{cases} x - 3y - z + 2u = 3 \\ -x + 3y + 2z - 2u = 1 \\ -x + 3y + 4z - 2u = 9 \\ 2x - 6y - 5z + 4u = -6 \end{cases}$$

解答 右のようにはき出して解を求めると

$y (= \alpha)$, $u (= \beta)$ を任意として,

$$\begin{cases} x = 7 + 3\alpha - 2\beta \\ y = \alpha \\ z = 4 \\ u = \beta \end{cases}$$

ゆえに $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

であり,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 = 4 - 2$$

だから $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (= x_1)$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (= x_2)$ が1組の基本解であり $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} (= x_0)$ が特殊解

である. 以上から解を x とすると $x = x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2$ である.

問題

5.1 つぎの同次連立1次方程式を解き, 1組の基本解を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} & \text{(d)} \quad & x + y - 2z + u = 0 \end{aligned}$$

5.2 例題3および問題3.1の解の特殊解と同伴な同次連立1次方程式の1組の基本解を求めよ.

5.3 A, B を n 次正方行列とする. AB が正則 $\implies A, B$ が正則 を示せ.

x	y	z	u	定数
1	-3	-1	2	3
-1	3	2	-2	1
-1	3	4	-2	9
2	-6	-5	4	-6
1	-3	-1	2	3
0	0	1	0	4②+①
0	0	3	0	12③+①
0	0	-3	0	-12④+①×(-3)
1	-3	0	2	7①+②
0	0	1	0	4
0	0	0	0	0③+②×(-2)
0	0	0	0	0④+②×3