寺田・坂田, 「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

4.5 正規直交基底

● 正規直交基底 ●

正規直交系　m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

をみたすとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を**正規直交系**であるという．正規直交系は 1 次独立である．

正規直交基底　基底が正規直交系のとき**正規直交基底**という．計量ベクトル空間 V は正規直交基底をもつ．$\boldsymbol{R}^n$ の標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は正規直交基底である．$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_m\}$ $(m = \dim V)$ を V の正規直交基底とする．

$$\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)_{\mathcal{B}}, \quad \boldsymbol{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{\mathcal{B}}$$

を V のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の $\mathcal{B}$ に関する成分とすると，内積は自然な内積のときと同じことになる．すなわち

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$$

グラム・シュミットの直交化法　V の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m, (m = \dim V)$ からつぎの手順によって正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を作る方法を**グラム・シュミットの直交化法**という．

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 \qquad \boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|}$$

$$\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_3}{|\boldsymbol{y}_3|}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{x}_m - (\boldsymbol{x}_m \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_m \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 - \cdots - (\boldsymbol{x}_m \cdot \boldsymbol{a}_{m-1})\boldsymbol{a}_{m-1} \quad \boldsymbol{a}_m = \frac{\boldsymbol{y}_m}{|\boldsymbol{y}_m|}$$

正規直交基底の補充（取り替え）定理　$\dim V = m$ とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ を正規直交系とするとき，$m-d$ 個の V のベクトル $\boldsymbol{a}_{d+1}, \boldsymbol{a}_{d+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を選んで，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{a}_{d+1}, \boldsymbol{a}_{d+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V の正規直交基底であるようにすることができる．

● 2組の正規直交基底の関係 ●　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V の正規直交基底，$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ を V のベクトルとし

$$\boldsymbol{a}'_j = p_{1j}\boldsymbol{a}_1 + p_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{mj}\boldsymbol{a}_m \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

とする．このとき

$$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_m \text{が正規直交基底} \iff P = [p_{ij}] \text{が } m \text{ 次直交行列} \quad ({}^tPP = E)$$

例題 13　　　　直交行列

(a)　2 次の正方行列 $P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]$ が直交行列であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が互いに直交する単位ベクトル（$\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底）であることを示せ．

(b)　$\begin{bmatrix} a & -1/2 \\ 1/2 & b \end{bmatrix}$ が直交行列であるとき，a, b を求めよ．

解答　(a)　P が直交行列 $({}^tPP = E)$ であると

$${}^tPP = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

から

$${}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 = |\boldsymbol{x}_1|^2 = 1, \quad {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0, \quad {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 = |\boldsymbol{x}_2|^2 = 1$$

だから $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は互いに直交する単位ベクトルである．
逆に，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が互いに直交する単位ベクトルなら $P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]$ は ${}^tPP = E$ をみたすから直交行列である．

(b)　(a) から

$$a^2 + (1/2)^2 = 1, \quad -a/2 + b/2 = 0, \quad (-1/2)^2 + b^2 = 1$$

だから

$$a = b = \pm\sqrt{3}/2$$

である．

注意　直交行列 P の行ベクトルも互いに直交する単位ベクトルである．一般に n 次の直交行列の列（行）ベクトルは互いに直交する単位ベクトル（$\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底）である．

問　題

13.1　つぎの行列が直交行列であるように a, b, c, d を定めよ．

(a)　$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & a \\ b & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$　　(b)　$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & b \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & c \end{bmatrix}$

(c)　$\begin{bmatrix} 5/13 & a & 0 \\ b & -5/13 & c \\ d & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13.2　2 次の直交行列 P は $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，または $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$，$(0 \leq \theta < 2\pi)$ であることを示せ．

寺田・木村，「演習と応用 線形代数」(サイエンス社,2005)

4.2 偏導関数

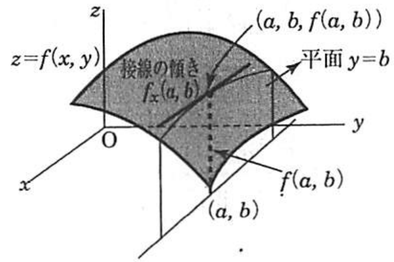
● **偏微分可能性** ● (a,b) を含む領域 D で定義された関数 $f(x,y)$ で，$y=b$ とおいて得られる x の関数 $f(x,b)$ が $x=a$ で微分可能のとき，$f(x,y)$ は点 (a,b) で **x に関して偏微分可能である**といって，その微分係数

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

を点 (a,b) における **x に関する偏微分係数**という．記号で

$$f_x(a,b),\quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(a,b)$$

などで表す．これは $z=f(x,y)$ の表す曲面を，平面 $y=b$ で切ったときの切り口の曲線上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接線の傾きを表す（右図を参照）．



同様に，点 (a,b) における $f(x,y)$ の **y に関する偏微分係数**

$$f_y(a,b),\quad \frac{\partial f(a,b)}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(a,b)$$

が定義できる．

偏導関数 領域 D の各点 (x,y) に対し，その点における $z=f(x,y)$ の x に関する偏微分係数 $f_x(x,y)$ を対応させる関数を **x に関する偏導関数**といって，

$$f_x(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad z_x$$

などと書く．**y に関する偏導関数**

$$f_y(x,y),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad z_y$$

も同様に定義される．一般に，2変数の関数 $f(x,y)$ に対してその偏導関数を求めることを，$f(x,y)$ を x あるいは y についても**偏微分する**という．

● **全微分可能性** ● 関数 $f(x,y)$ が点 (x,y) で**全微分可能**であるとは，x, y の増分 h, k に対して，h, k に無関係な数 A, B（x, y には関係する）が存在して

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=Ah+Bk++\varepsilon\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\varepsilon\to 0\quad (h\to 0, k\to 0)$$

となるときである．$df=Ah+Bk$ をその点における f の**全微分**という．

つぎに領域 D の各点で全微分可能のとき**領域 D で全微分可能**という．

定理6（**全微分可能性と偏微分可能性**） 関数 $f(x,y)$ が点 $(x,y)\in D$ で全微分可能ならば $f(x,y)$ はその点で偏微分可能であり，

$$df=f_x(x,y)h+f_y(x,y)k$$

一般に「偏微分可能 ⇒ 全微分可能」,「偏微分可能 ⇒ 連続」,「連続 ⇒ 全微分可能」は成立しない．それらの例はそれぞれ「p. 73 の例題 4」,「p. 73 の問題 4.1，p. 69 の問題 2.1(3)」および「p. 69 の問題 2.1(1)，p. 73 の例題 4」などである．

定理7（**全微分可能性**） 関数 $f(x,y)$ が領域 D で偏微分可能で，$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が D で連続ならば，$f(x,y)$ は D で全微分可能である．

定理8（**全微分可能性と連続性**） 関数 $f(x,y)$ が点 $(x,y)\in D$ で全微分可能ならば連続である．

● **合成関数の偏微分法** ●

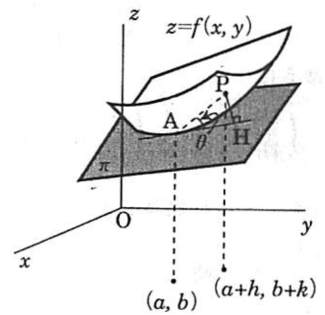
定理9（**合成関数の微分**） 関数 $z=f(u,v)$ が全微分可能で，$u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$ が微分可能ならば

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ が偏微分可能ならば

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

● **接平面** ● 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 A を通る平面 π について，曲面上の点 P から平面 π におろした垂線の足を H，AP と AH とのなす角を θ とするとき，$\theta\to 0\ (\mathrm{P}\to\mathrm{A})$ ならば，π を点 A における**この曲面の接平面**という．



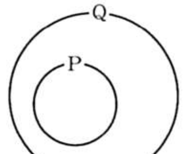
定理10（**接平面の方程式**） 関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能ならば，点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

〔2〕

(1) 命題「$p\Rightarrow q$」が真であるとは，条件 p を満たすものはすべて条件 q を満たすことであるから，

$$\boxed{⓪\quad \mathrm{P}\subset\mathrm{Q}}$$



(2) 命題「$p\Rightarrow q$」の逆は「$p\Leftarrow q$」であるから，この逆の命題が真であることと

$$\boxed{①\quad \mathrm{P}\supset\mathrm{Q}}$$

が成り立つこととは同じである．

命題 $p\Rightarrow q$ に対して，
$q\Rightarrow p$ を逆，
$\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$ を裏，
$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ を対偶
という．

(3) 条件 $\overline{p}$ を満たす要素の集合は P の補集合 $\overline{\mathrm{P}}$ であるから，命題「$\overline{p}\Rightarrow q$」が真であることと

$$\boxed{③\quad \overline{\mathrm{P}}\subset\mathrm{Q}}$$

が成り立つこととは同じである．また，このとき対偶命題「$p\Leftarrow\overline{q}$」も真であるから，

$$\boxed{④\quad \mathrm{P}\supset\overline{\mathrm{Q}}}$$

が成り立つこととも同じである．

← $\overline{\overline{p}}=p$.

← ある命題とその対偶命題の真偽は一致．

(4) すべての自然数が条件「$\overline{p}$ または q」を満たすということは，$\mathrm{U}=\overline{\mathrm{P}}\cup Q$ が成り立つことである．

よって，

$$\overline{\mathrm{U}}=\overline{\overline{\mathrm{P}}\cup\mathrm{Q}}$$
$$\phi=\mathrm{P}\cap\overline{\mathrm{Q}}$$

したがって，

$$\boxed{⓪\quad \mathrm{P}\subset\mathrm{Q}}$$

が成り立つことと同じである．

ド・モルガンの法則

$$\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$$
$$\overline{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}$$

第2問　2次関数

G_1 が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，

$$1=4a+2b+c$$

が成り立つから，

$$c=\boxed{-4}a-\boxed{2}b+\boxed{1} \qquad \cdots①$$

であり，G_2 が $(-3,\ 1)$ を通るとき，

$$1=-9a-3b+d$$

が成り立つから，

$$d=\boxed{9}a+\boxed{3}b+\boxed{1} \qquad \cdots②$$

である．

G_1 の頂点は

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

から，

$$\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right). \qquad \cdots③$$

← $y=k(x-p)^2+q\ (k\neq 0)$ の形に変形する．このとき，頂点の座標は，
$(p,\ q)$.

一方，G_2 の頂点は

$$y=-ax^2+bx+d$$
$$=-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+d+\frac{b^2}{4a}$$

から，

$$\left(\frac{b}{2a},\ d+\frac{b^2}{4a}\right). \qquad \cdots④$$

G_1 の頂点と G_2 の頂点が原点に関して対称であるとき，③，④ から，

$$c-\frac{b^2}{4a}=-\left(d+\frac{b^2}{4a}\right)$$
$$c=-d$$

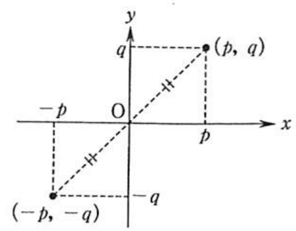
が成り立つから，①，② を用いて，

$$-4a-2b+1=-(9a+3b+1).$$
$$b=\boxed{-5}a-\boxed{2} \qquad \cdots⑤$$

が成り立つ．ここで，G_1 の頂点を点 $(p,\ q)$ とすると，③ から，

$$\begin{cases} p=-\dfrac{b}{2a}, \\ q=c-\dfrac{b^2}{4a}. \end{cases}$$

← 2点 $(p,\ q)$，$(-p,\ -q)$ は原点に関して対称．



⑤を用いて，

$$p=-\frac{-5a-2}{2a}=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}+\frac{1}{a},$$

①, ⑤を用いて，

$$q=-4a-2(-5a-2)+1-\frac{(-5a-2)^2}{4a}$$

$$=6a+5-\frac{25a^2+20a+4}{4a}$$

$$=-\frac{a}{\boxed{4}}-\frac{1}{a}$$

であり，

$$p+q=\frac{5}{2}-\frac{a}{4} \qquad \cdots⑥$$

となる．

G_1 の頂点 $(p,\ q)$ が直線 $y=-x+2$ 上にあるならば，

$$q=-p+2$$

すなわち，

$$p+q=2 \qquad \cdots⑦$$

が成り立つので，⑥, ⑦より，

$$\frac{5}{2}-\frac{a}{4}=2$$

$$a=\boxed{2}$$

となり，このとき，⑤より，

$$b=-5\cdot2-2=-12.$$

②より，

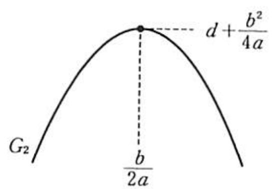
$$d=9\cdot2+3\cdot(-12)+1=-17$$

であるから，G_2 を表す2次関数の最大値は

$$d+\frac{b^2}{4a}=-17+\frac{(-12)^2}{4\cdot2}$$

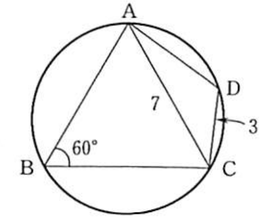
$$=\boxed{1}$$

である．



G_2 は上に凸の放物線だから頂点で最大となる．

第3問　図形と計量・平面図形



四角形 ABCD は円に内接しているから，

$$\angle ABC+\angle ADC=180°$$

が成り立ち，$\angle ABC=60°$ であるから，

$$\angle ADC=\boxed{120}°$$

であり，AD$=x$ とおき，三角形 ADC に余弦定理を用いると，

$$AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos120°$$

$$7^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right).$$

整理して，

$$x^2+3x-40=0$$

$$(x+8)(x-5)=0.$$

$x>0$ より，

$$x=AD=\boxed{5}$$

となる．したがって，三角形 ADC の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin120°=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120°. \qquad \cdots①$$

一方，三角形 ADC の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD=\frac{1}{2}\cdot7\cdot3\cdot\sin\angle ACD \qquad \cdots②$$

とも表せるから，①, ②より，

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120°=\frac{1}{2}\cdot7\cdot3\cdot\sin\angle ACD$$

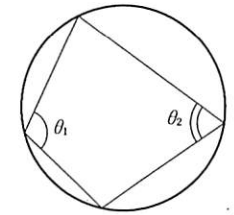
より，

$$\sin\angle ACD=\frac{\boxed{5}\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{14}}$$

である．

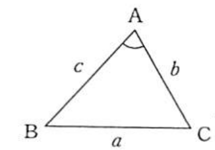
(別解)　三角形 ADC に余弦定理を用いて，

円に内接する四角形の性質



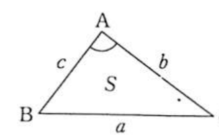
$\theta_1+\theta_2=180°.$

余弦定理



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

三角形の面積



$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$