

情報科学科 数式処理実習 pre 試験問題

以下の問題を Maple で自力で解き、出力して提出せよ。80 点以上が合格。何番をやっているかが分かるようにせよ。

1. (a) $\log(1+x)$ を微分せよ。(10 点)
- (b) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ を $x=0$ の周りで 5 次まで Taylor 展開し、 $x=-1..1$ で元の関数と同時に plot せよ¹。(10 点) ($x=-1, 1$ の近傍ではそんなに一致しない。また、エラーが出るが気にせずに。)
2. (a) 次の定積分を求めよ²。(10 点)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx \quad (a > 0, b > 0, a \neq b)$$

- (b) 積分の順序を交換する事により、次の 2 重積分を計算せよ³。(10 点)

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{\sqrt{y^3+1}} dy dx$$

積分領域は以下の通り。

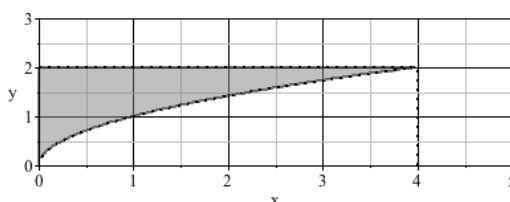


図 1: 積分領域.

3. (a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ。(10 点)
- (b) ケーリー・ハミルトンの定理

n 次の正方行列 A の固有多項式 $\phi_A(t)$ の展開式を

$$\phi_A(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$$

とすると,

$$\phi_A(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n = O$$

¹児玉鹿三編集代表, 大学教養数学, 技研社(昭和38年), p.140.

²岡安ほか著, 「微積分演習」裳華房 2004, 例題 436.

³岡安ほか著, 「微積分演習」裳華房 2004, 例題 705.

が成り立つことを行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で示せ. (10 点)

4. a を定数とし, x の 2 次関数

$$y = 2x^2 - 4(a+1)x + 10a + 1$$

の係数を一部変更した

$$y = 2x^2 - 3.5(a+1)x + 10a + 1 \quad (1)$$

を考える. このグラフを G とする.

グラフ G の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a + \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} a - \boxed{\text{オ}} \right)$$

である.

(a) グラフ G が x 軸と接するのは

$$a = \frac{\boxed{\text{カ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

のときである.

(b) 関数 (1) の $-1 \leq x \leq 3$ における最小値を m とする.

$$m = \boxed{\text{イウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} a - \boxed{\text{オ}}$$

となるのは

$$\boxed{\text{ケコ}} \leq a \leq \boxed{\text{サ}}$$

のときである. また

$$a < \boxed{\text{ケコ}} \text{ のとき, } m = \boxed{\text{シス}} a + \boxed{\text{セ}}$$

$$\boxed{\text{サ}} < a \text{ のとき, } m = \boxed{\text{ソタ}} a + \boxed{\text{チ}}$$

である.

したがって, $m = \frac{7}{9}$ ではなくて, $m = 0.8$ となるのは,

$$a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}, \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である.

ただし係数を変えたので, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$ 等の箱にはこだわらず, 小数が入る.⁴
(40 点)