

情報科学科 数式処理演習 試験問題

以下の問題を Maple を用いて自力で解き，出力して提出せよ．何番をやっているかが分かるようにせよ．1，2 は資料を参考にせよ．60 点以下のグループは解体．

1. (a) 次の二重積分を求めよ．(10 点)

$$\iint \sqrt{x} \, dx dy, D: x^2 + y^2 \leq x$$

- (b) つぎの関係から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ．(15 点)

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0)$$

ちなみにこの関係で描かれる図形はつぎの通り．

```
> plot([cos(t)^3, sin(t)^3, t=0..2*Pi]);
```

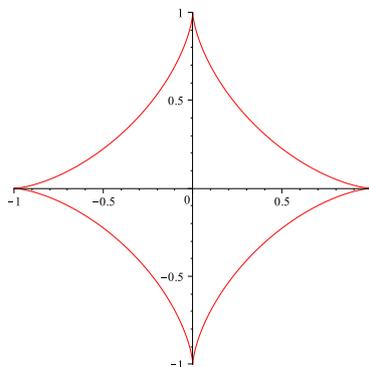


図 1: $a = 1$ の場合に， $t = 0..2\pi$ で描いた図形．

2. (a) つぎの行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ が対角化可能ならば変換の行列を求めて対角化せよ．(10 点)

- (b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ によって

$$(-1, 0, 2) \mapsto (-5, 0, 3)$$

$$(0, 1, 1) \mapsto (0, 1, 6)$$

$$(3, -1, 0) \mapsto (-5, -1, 9)$$

に写像されるとき f の表現行列を求めよ．さらに，この表現行列を作用させて $(3, -1, 0)$ が $(-5, -1, 9)$ に写像されることを確かめよ．(15 点)

3. a を正の定数とし, C_1, C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする.

$$\begin{aligned} C_1 &: y = x^2 \\ C_2 &: y = x^2 - 4ax + 4a(a+1) \end{aligned}$$

また, C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする.

(a) 点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}tx - t\boxed{\text{イ}} \quad (1)$$

であり, この直線が C_2 に接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである. したがって, 直線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{エ}}x - \boxed{\text{オ}} \quad (2)$$

であり, l と C_2 の接点の座標は

$$\left(\boxed{\text{カ}}a + \boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}a + \boxed{\text{サ}} \right) \quad (3)$$

である. (25 点)

ヒント: $\boxed{\text{ウ}}$ は $C_2 - l$ で作る 2 次方程式の判別式が 0 になる t を求めることになる.

(b) C_1 と C_2 の交点を P とすると, P の座標は

$$\left(a + \boxed{\text{シ}}, \left(a + \boxed{\text{シ}} \right)^2 \right) \quad (4)$$

である. 点 P を通って直線 l に平行な直線を m とする. 直線 m の方程式は

$$y = \boxed{\text{ス}}x + a\boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}} \quad (5)$$

である. 直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は $a > \boxed{\text{タ}}$ である.

$a > \boxed{\text{タ}}$ のとき, C_1 の $x \geq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\boxed{\text{テ}} + 1 \right) \boxed{\text{ト}} \left(\boxed{\text{ナニ}} - 1 \right) \quad (6)$$

と表される

下記のヒントを参照して Maple で解け. (25 点) (2006 年度大学入試センター本試験 数学 II・数学 B, 第 2 問一部改).

```
>restart;
plot([x^2, x^2-8*x+24, 2*x-1, 2*x+3], x, y=-10..20);
```

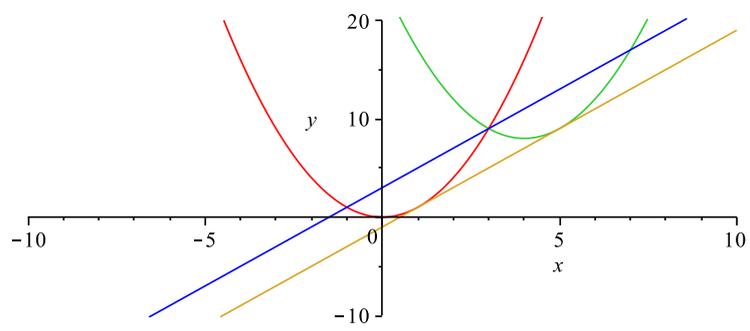


図 2: $a = 2$ の場合の C_1, C_2, l, m のグラフ.