Table of Contents

2020年度　数式処理演習　pair試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2020/11/26 実施

- file: ~/symboic_math/exams/20_pre_ans.ipynb

以下の問題をpythonで解き，LUNAへ提出せよ．LUNAへはipynbとpdf形式の２種類を提出すること．

微積分

ソフトマックス関数の概形(15点)

ソフトマックス関数

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

の増減，極値，凹凸を調べ，曲線$y = f(x)$の概形を描け．

In [1]:
```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')

f = 1/(1+exp(-x))
f
```

Out[1]:
$$\frac{1}{1+e^{-x}}$$

In [2]:
```
df = f.diff(x)
df
```

Out[2]:
$$\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

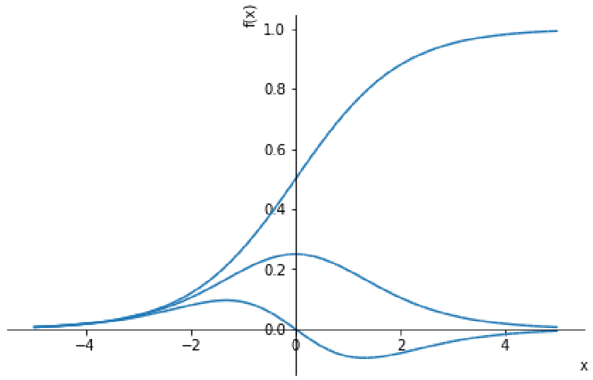
In [3]:
```
df2 = f.diff(x,x)
df2
```

Out[3]:

$$\frac{\left(-1+\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

In [4]:
```
%matplotlib inline

plot(f,df,df2,(x,-5,5))
```



Out[4]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fd634e6db50>

In [5]:
```
solve(df,x)
```

Out[5]: []

In [6]:
```
solve(df2,x)
```

Out[6]: [0]

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
f(x)	0	↗	0.5	↗	0
f'(x)	0	+	+	+	0
f''(x)	0	+	0	-	0

3D関数のプロット(15点)

３変数のシグモイド関数で，１変数を固定すると次のような関数となる．

```
import numpy as np

def softmax(x,y):
    return np.exp(-x)/(np.exp(-x)+np.exp(-y)+np.exp(-1))
```

この関数を

```
x = np.arange(-4, 4, 0.5)
y = np.arange(-4, 4, 0.5)
```

で３次元プロットせよ．

In [7]:
```
import numpy as np
```

```
def softmax(x,y):
    return np.exp(-x)/(np.exp(-x)+np.exp(-y)+np.exp(-1))
```

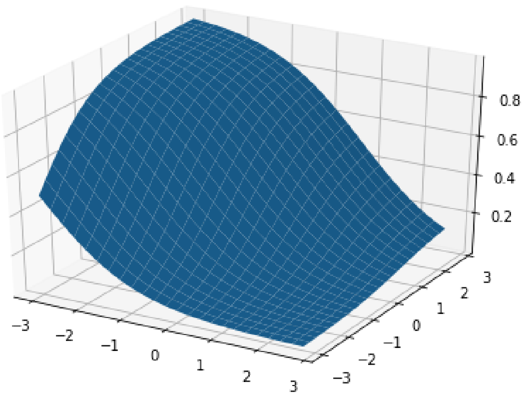
In [8]:
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [9]:
```
%matplotlib inline

x = np.arange(-3, 3, 0.25)
y = np.arange(-3, 3, 0.25)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z1 = softmax(X,Y)


fig = plt.figure()
plot3d = Axes3D(fig)
plot3d.plot_surface(X,Y,Z1)


plt.show()
```



線形代数

線形結合の確認(p.173, 5-39)(15点)

sympyを使って，$w^T x$で線形結合が得られることを確認せよ．

1. $w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を作る．
2. wを転置する
3. ww.T*xx で線形結合となることを確認する．
4. ww*xx.T では3x3の行列が得られることも確認せよ．

In [10]:
```
from sympy import *
w0,w1,w2  = symbols('w0,w1,w2')
x0,x1,x2  = symbols('x0,x1,x2')

ww = Matrix([w0,w1,w2])
xx = Matrix([x0,x1,x2])
ww
```

Out[10]:

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

In [11]:
```
ww.T*xx
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix} w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 \end{bmatrix}$$

In [12]:
```
ww*xx.T
```

Out[12]:

$$\begin{bmatrix} w_0 x_0 & w_0 x_1 & w_0 x_2 \\ w_1 x_0 & w_1 x_1 & w_1 x_2 \\ w_2 x_0 & w_2 x_1 & w_2 x_2 \end{bmatrix}$$

解析解の確認(p.177, 5-60)(15点)

```
xdata=np.array([1,2,3,4])
ydata=np.array([0,5,15,24])
```

を対象データとして，(5-53)にしたがって，N=4, n=3で

$$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$$

に対するfittingを行う．得られたデザイン行列Xは

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

となる．(5-59)式の左辺の$X^T X$が3x3行列になることを確認せよ．

ヒント：
https://nbviewer.jupyter.org/github/daddygongon/jupyter_num_calc/blob/master/numerical_calc/
の「正規方程式(Normal Equations)による解」の「python codeによる具体例」を参照せよ．

In [13]:
```
import numpy as np
from pprint import pprint
import scipy.linalg as linalg

X = Matrix([[ 1.,  1.,  1.],
     [ 1.,  2.,  4.],
     [ 1.,  3.,  9.],
     [ 1.,  4., 16.]])

np.dot(X.T,X).shape
```

Out[13]: (3, 3)

センター試験原題(10点)

(2018大学入試センター試験　追試験 数学II・B 第2問)

a を正の実数とし，放物線$y=3x^2$ をC_1, 放物線$y=2x^2+a^2$ をC_2 とする． C_1 とC_2 の二つの共有点を x 座標の小さい順にA,Bとする． また，C_1 とC_2 の両方に第1象限で接する直線を l とする．

(1) Bの座標をa を用いて表すと $(\boxed{ア}, \boxed{イ}a^{\boxed{ウ}})$ である

In [14]:
```
from sympy import *
a, s, t, x = symbols('a, s, t, x')
```

In [15]:
```
yC1 = 3*x**2
yC1
```

Out[15]: $3x^2$

In [16]:
```
yC2 = 2*x**2+a**2
yC2
```

Out[16]: a^2+2x^2

In [17]:
```
eq = yC1 - yC2
```

In [18]:
```
xB = solve(eq,x)[1]
xB
```

Out[18]: a

In [19]:
```
yC2.subs({x:xB})
```

Out[19]: $3a^2$

直線l と二つの放物線C_1, C_2 の接点のx 座標をそれぞれs, t とおく． l は$x=s$ でC_1 と接するので， l の方程式は

$$y=\boxed{エ}sx-\boxed{オ}s^{\boxed{カ}}$$

と表せる． 同様に， l は$x=t$ でC_2 と接するので， l の方程式は

$$y=\boxed{キ}tx-\boxed{ク}t^{\boxed{カ}}+a^2$$

とも表せる． これらにより， s, t は

$$s=\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}a, \quad t=\frac{\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{サ}}a$$

である．

In [20]:
```
m1 = diff(yC1)
```

In [21]:
```
#y - y0 = m*(x-x0)
yl1 = m1.subs({x:s})*(x-s)+yC1.subs({x:s})
```

In [22]:
```
yl1.expand()
```

Out[22]: $-3s^2+6sx$

In [23]:
```
m2 = diff(yC2,x)
yl2 = m2.subs({x:t})*(x-t)+yC2.subs({x:t})
```

In [24]:
```
yl2.expand()
```

Out[24]: a^2-2t^2+4tx

In [25]:
```
t0=solve(m1.subs({x:s})-m2.subs({x:t}),t)[0]
t0
```

Out[25]: $\frac{3s}{2}$

In [26]:
```
s0=solve((yl1-yl2).subs({x:0}).subs({t:t0}),s)[1]
s0
```

Out[26]: $\frac{\sqrt{6}a}{3}$

In [27]:
```
t0.subs({s:s0})
```

Out[27]: $\frac{\sqrt{6}a}{2}$

放物線C_1 の$s \leqq x \leqq \boxed{ア}$ の部分 放物線C_2 の$\boxed{ア} \leqq x \leqq t$ の部分, x 軸， および2直線 $x=s, x=t$で囲まれた図形の面積は

$$\frac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}-\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}a^{\boxed{タ}}$$

である．

In [28]:
```
SS=integrate(yC1,(x,s,a))+integrate(yC2,(x,a,t))
```

In [29]:
```
together(SS.subs({t:t0}).subs({s:s0}))
```

Out[29]: $\frac{a^3\left(-6+7\sqrt{6}\right)}{9}$

数値改変(30点)

問3.において，放物線C_1 が

$$y=2.9x^2$$

である場合について解きなさい． ただし，係数が浮動小数点数に変わったので，$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ などには浮動小数点数が入る．最後の図形の面積は， $1.284186\ldots a^3$ となる．(30点)

In [30]:
```
from sympy import *
a, s, t, x = symbols('a, s, t, x')
```

In [31]:
```
yC1 = 2.9*x**2
yC1
```
Out[31]: $2.9x^2$

In [32]:
```
yC2 = 2*x**2+a**2
yC2
```
Out[32]: $a^2 + 2x^2$

In [33]:
```
eq = yC1 - yC2
```

In [34]:
```
xB = solve(eq,x)[1]
xB
```
Out[34]: $1.05409255338946a$

In [35]:
```
yC2.subs({x:xB})
```
Out[35]: $3.22222222222222a^2$

In [36]:
```
m1 = diff(yC1)
```

In [37]:
```
#y - y0 = m*(x-x0)
yl1 = m1.subs({x:s})*(x-s)+yC1.subs({x:s})
```

In [38]:
```
yl1.expand()
```
Out[38]: $-2.9s^2 + 5.8sx$

In [39]:
```
m2 = diff(yC2,x)
yl2 = m2.subs({x:t})*(x-t)+yC2.subs({x:t})
```

In [40]:
```
yl2.expand()
```
Out[40]: $a^2 - 2t^2 + 4tx$

In [41]:
```
t0=solve(m1.subs({x:s})-m2.subs({x:t}),t)[0]
t0
```
Out[41]: $1.45s$

In [42]:
```
s0=solve((yl1-yl2).subs({x:0}).subs({t:t0}),s)[1]
s0
```
Out[42]: $0.875376219064817a$

In [43]:
```
t0.subs({s:s0})
```
Out[43]: $1.26929551764398a$

In [44]:
```
SS=integrate(yC1,(x,s,a))+integrate(yC2,(x,a,t))
```

In [45]:
```
together(SS.subs({t:t0}).subs({s:s0}))
```
Out[45]: $1.28418609654692a^3$

In [46]:
```
(-6+7*sqrt(6.0))/9
```
Out[46]: 1.23849202216469

In [ ]: