

情報科学科 数式処理演習 pair リハーサル試験 試験問題

以下の問題を Maple を用いて自力で解き, 出力して提出せよ. 60 点以下ならチーム解消.

1. (a) (Einstein 結晶のエネルギー) 次の関数 $E(x)$ を求めて $x=0..2$ でプロットせよ. (15 点)

$$Z(x) = \frac{\exp(1/x)}{1 - \exp(-1/x)}$$

$$E(x) = x^2 \frac{d}{dx} \log(Z(x))$$

- (b) 資料を参考にして, 次の 2 重積分を求めよ. (15 点)

$$\int \int_D \sqrt{2x^2 - y^2} dx dy, \quad D : 0 \leq y \leq x \leq 1$$

2. (a) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の対角化行列を求めて, 対角化せよ. (15 点)

- (b) 資料を参考にして, 行列 $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & a \\ b & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ が直交行列であるとき, a, b を求めよ. (15 点)

3. p を実数とし, $f(x) = x^3 - p x$ とする.

- (a) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう. $f(x)$ の導関数は,

$$f'(x) = \boxed{\text{ア}} x^{\boxed{\text{イ}}} - p$$

である. したがって, $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば,

$$\boxed{\text{ア}} a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$$

が成り立つ. さらに $x = a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより, p が条件 $\boxed{\text{エ}} (p > 0)$ を満たす場合は $f(x)$ は必ず極値を持つことがわかる.

- (b) 関数 $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとるとする. また, 曲線 $y = f(x)$ を C とし, C 上の点 $\left(\frac{p}{3}, f\left(\frac{p}{3}\right)\right)$ を A とする.

$f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとることから, $p = \boxed{\text{オ}}$ であり, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり, $x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる.

曲線 C の接線で、点 A を通り傾きが 0 でないものを l とする。 l の方程式を求めよう。 l と C の接点の x 座標を b とすると、 l は点 $(b, f(b))$ における C の接線であるから、 l の方程式は b を用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}} b^2 - \boxed{\text{コ}} \right) (x - b) + f(b)$$

と表すことができる。 また、 l は点 A を通るから、方程式

$$\boxed{\text{サ}} b^3 - \boxed{\text{シ}} b^2 + 1 = 0$$

を得る。 この方程式を解くと、

$$b = \boxed{\text{ス}}, \frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるが、 l の傾きが 0 でないことから、 l の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}} x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点 A を頂点とし、原点を通る放物線を D とする。 l と D で囲まれた図形のうち、不等式 $x \geq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。 D の方程式は、

$$y = \boxed{\text{ニ}} x^2 - \boxed{\text{ヌ}} x$$

であるから、定積分を計算することにより、 $S = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。(10点)

(2014年度大学入試センター試験 本試験 数学II・B 第2問)

4. . 前問3(b)の C 上の頂点 A の座標を $\left(\frac{p}{4}, f\left(\frac{p}{4}\right)\right)$ と変えて問題を解け。ただし数値を変えたので、それほど複雑な数字にはならないが、 $\boxed{\text{オ}}$ 、 $\boxed{\text{カキ}}$ 等には箱にこだわらず数字がはいる。最後は $S = \frac{34}{27}$ ではなく、 $S = \frac{352}{243}$ になる。(30点)