例題 14 ―― **グラム・シュミットの直交化法**

グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を作れ．

$$\boldsymbol{x}_1 = (-2, 1, 0), \quad \boldsymbol{x}_2 = (-1, 0, 1), \quad \boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 1)$$

解答　まず $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$ とおくと

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

つぎに

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, 1) - \frac{2}{5}(-2, 1, 0) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, -2, 5) = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 \\ &= (1, 1, 1) + \frac{1}{5}(-2, 1, 0) - \frac{1}{15}(-1, -2, 5) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

を正規化して

$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_3}{|\boldsymbol{y}_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

P.60
a_1, a_2 で
正規直交を確認しながら計算.
$\sqrt{a_1 \cdot a_1}$　$a_2 \cdot a_1 = 0$　$a_3 \cdot a_1 = 0$　$a_2 \cdot a_3 = 0$

問　題

14.1 グラム・シュミットの直交化法により，つぎのベクトルから各空間の正規直交基底を作れ．

(a)　$\boldsymbol{R}^2$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (-1, 3)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2, -1)$

(b)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (0, 1, 1)$

(c)　$\boldsymbol{R}^3$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (-1, 0, 1)$

(d)　$\boldsymbol{R}^4$ において，$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{x}_4 = (1, 1, 0, 1)$

例題 15 ―― **直交補空間**

(a)　V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．

$$V^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n ; \text{すべての } \boldsymbol{y} \in V \text{ に対して } \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0\}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間になることを示せ（これを V の**直交補空間**という）．

(b)　$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 ;\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0\}$ の直交補空間 $V^{\perp}$ を求めよ．

解答　(a)　零ベクトル $\boldsymbol{0}$ はどんなベクトルとも直交するから $\boldsymbol{0} \in V$．よって $V^{\perp}$ は空でない．V のかってなベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V^{\perp} \quad &\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{y} = 0 \\ \boldsymbol{x} \in V^{\perp}, \lambda \in \boldsymbol{R} \quad &\Longrightarrow \quad (\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \lambda \boldsymbol{x} \in V$ だから V は部分空間をなす．

(b)　同次連立1次方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
3	1	−1
1	−5	1
1	−5	1
0	16	−4
1	0	−1/4
0	1	−1/4

を解くと，表から $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$．

よって，$(1, 1, 4)$ は V の基底であり，その直交補空間は

$$V^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3) ;\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0\}$$

である．$V^{\perp}$ の基底を求めるために方程式 $x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ を解くと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって，$V^{\perp}$ の基底 $(-1, 1, 0), (-4, 0, 1)$ で生成される部分空間である．

注意　$(3, 1, -1), (1, -5, 1)$ も $V^{\perp}$ の基底である．

問　題

15.1 $\boldsymbol{R}^n = V \oplus V^{\perp}$ であることを示せ．

15.2 つぎのベクトルで生成される各部分空間 V の直交補空間 $V^{\perp}$ を求めよ．

(a)　$(1, 0, -7)$

(b)　$(3, 1, -1), (1, -5, 1)$

(c)　$(1, 0, -1, 2), (-1, 1, 1, 0)$

駿台 2018大学入試センター試験
過去問題集 数学I·A, II·B

$y-3k=0$
いると

0 から $k=\dfrac{25}{6}$

……③

$=25$ が A を通る

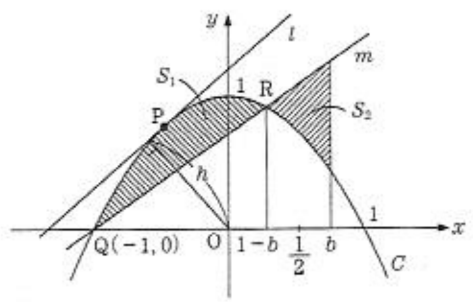
……④

座標は

, b) から C に引
ると，直線 PQ の

第2問（数学II 微分・積分の考え，いろいろな式，図形と方程式）

＜解説＞



(1) $C: y=1-x^2$, $y'=-2x$

C 上の点 P$(a,\ 1-a^2)$ における接線 l の方程式は

$$y=-2a(x-a)+1-a^2$$

$$\iff y=-2ax+a^2+1$$

$$\iff 2ax+y-a^2-1=0$$

直線 l と原点 O の距離 h は

$$h=\frac{|2a\cdot 0+0-a^2-1|}{\sqrt{(2a)^2+1^2}}=\frac{a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}}$$

ここで，$t=\sqrt{4a^2+1}$ とおくと $t>0$ であり

$a^2=\dfrac{t^2-1}{4}$ であるから

$$h=\frac{\dfrac{t^2-1}{4}+1}{t}=\frac{t^2+3}{4t}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{3}{t}\right)$$

相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$\frac{t+\dfrac{3}{t}}{2}\geqq\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}$$

$$\iff t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{3}$$

等号は $t=\dfrac{3}{t} \iff t^2=3$ のとき成り立ち，このとき，$a^2=\dfrac{1}{2} \iff a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，h の最小値は

$$\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\left(a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2) C 上の2点 Q$(-1,\ 0)$，R$(1-b,\ 2b-b^2)$ を通る直線を m とすると，m の傾きは

$$\frac{(2b-b^2)-0}{(1-b)-(-1)}=\frac{b(2-b)}{2-b}=b$$

であるから，m の方程式は

$$y=b(x+1)$$

$$\iff y=bx+b$$

C と m で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-1}^{1-b}\{1-x^2-(bx+b)\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{1-b}(x^2+bx+b-1)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{1-b}(x+1)(x+b-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(1-b)-(-1)\}^3$$

$$=\frac{1}{6}(2-b)^3$$

$$=-\frac{1}{6}b^3+b^2-2b+\frac{4}{3}$$

C と m の $1-b\leqq x\leqq b$ の部分，および直線 $x=b$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$\left(\dfrac{1}{2}<b\leqq 1\right.$ より $1-b<b\leqq 1$ に注意して$\left.\right)$

$$S_2=\int_{1-b}^{b}\{bx+b-(1-x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{1-b}^{b}(x^2+bx+b-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{b}{2}x^2+(b-1)x\right]_{1-b}^{b}$$

$$=\frac{b^3-(1-b)^3}{3}+\frac{b}{2}\{b^2-(1-b)^2\}$$

$$+(b-1)\{b-(1-b)\}$$

$$=\frac{2b^3-3b^2+3b-1}{3}$$

$$+\frac{b}{2}(2b-1)+(b-1)(2b-1)$$

$$=\frac{2}{3}b^3+2b^2-\frac{5}{2}b+\frac{2}{3}$$

よって

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}b^3+3b^2-\frac{9}{2}b+2$$

$$\frac{dS}{db}=\frac{3}{2}b^2+6b-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}(b^2+4b-3)$$

$\dfrac{dS}{db}=0$ より $b=-2\pm\sqrt{7}$ であるから，$\dfrac{1}{2}<b\leqq 1$ における S の増減は次のようになる．

b	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$-2+\sqrt{7}$	$\cdots$	1
$\frac{dS}{db}$		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

よって，S は $b=\sqrt{7}-2$ のとき最小になる．

(注) $S=\frac{1}{2}(b^2+4b-3)(b+2)-7b+5$

であり，$b=\sqrt{7}-2$ のとき $b^2+4b-3=0$ であるから，最小値は

$$-7(\sqrt{7}-2)+5=19-7\sqrt{7}$$

(注) S_1 を求めるとき

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を利用している．

第3問 （数学B 数列）

＜解説＞

$$a_1=-40$$

$$a_{n+1}=|4n-a_n|+2a_n \quad \cdots\cdots ①$$

(1) ①より

$$a_2=|4-a_1|+2a_1=44-80=-36$$

$$a_3=|8-a_2|+2a_2=44-72=-28$$

であるから，$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$a_n\leqq 4n \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$ のとき②が成り立つとすると

$$|4n-a_n|=4n-a_n$$

であるから，①より

$$a_{n+1}=(4n-a_n)+2a_n$$

$$\iff a_{n+1}-a_n=4n$$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $4n$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4k$$

$$=-40+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$$

$$=2n^2-2n-40$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+1$ のとき

$$a_n=2n^2-2n-40 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで

$$2n^2-2n-40>4n$$

$$\iff n^2-3n-20>0$$

$$\iff n<\frac{3-\sqrt{89}}{2},\ \frac{3+\sqrt{89}}{2}<n$$

であり $9<\sqrt{89}<10$ より $6<\frac{3+\sqrt{89}}{2}<\frac{13}{2}$ であるから，この不等式を満たす最小の自然数 n は

$$n=7$$

よって，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$ のとき

$$a_n=2n^2-2n-40$$

であり

$$a_7=2\cdot 7^2-2\cdot 7-40=44$$

(注) $1\leqq n\leqq 6$ のとき②が成り立つので $1\leqq n\leqq 7$ のとき

$$a_n=2n^2-2n-40$$

となる．

(2) $n\geqq 7$ のとき
$a_n>4n$
が成り立つこと
[Ⅰ] $n=7$ の
$a_7=44$
[Ⅱ] $n=k$ (≧
すると
$a_k>4k$
このとき，①
$a_{k+1}=|$
$=$
$=3$
であり，仮定
$3a_k-4$
$k\geqq 7$ より
$8k-4($
であるから
$a_{k+1}>8$
よって，$n=k$
[Ⅰ][Ⅱ] より
したがって，n
$a_{n+1}=3$
⑤より
$a_{n+2}-a$
$b_n=a_{n+1}-a_n$
$b_{n+1}=3$
この式を変形す
$b_{n+1}-2$
となり，数列 $\{b$
ら，$n\geqq 7$ のとき
$b_n-2=$
$\iff b_n=(b$
ここで，⑤，⑥
$b_n=a_n$
$=(3a$
$=2a$
であるから
$b_7=2a_7$
よって
$b_n=58$
⑦より
$a_n=\frac{1}{2}b$