例題 1 ―――― **2重積分 (1)**

(1) つぎの2重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq x$$

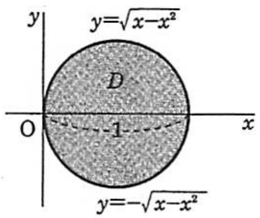
(2) $f(x,y)=1$ のとき，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は D の面積に等しいことを示せ．

解答 (1) $x^2+y^2=x$ は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形することによって，中心が $(1/2,0)$ で半径が $1/2$ の円である．D はこの円の周および内部である．この D を x に関する単純な領域と考える (p.86)．よって，

$$I=\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\,dy$$

$$=\int_0^1 [\sqrt{x}y]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$



いま，$\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$．よって

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=2\int_1^0(1-t^2)t(-2t)dt$$

$$=4\int_0^1(t^2-t^4)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

(2) p.85 の2重積分の定義(1)により，$f(x,y)=1$ のとき $f(x_i,y_i)\varDelta S_i=\varDelta S_i$ である．よって

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\varDelta S_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n \varDelta S_i=D \text{ の面積}$$

問 題

1.1 つぎの2重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D: y-\frac{1}{4}x^2 \geqq 0,\ y-x\leqq 0,\ x\geqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0\leqq y\leqq 1,\ y\leqq x\leqq 10y$

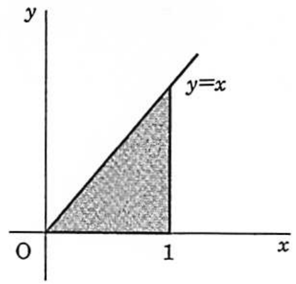
例題 2 ―――― **2重積分 (2)**

(1) つぎの2重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0\leqq y\leqq x\leqq 1$$

(2) 曲面 $z=e^{px+qy}$ $(pq \fallingdotseq 0)$
が xy 平面の正方形 $D=\{(x,y): 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ との間につくる立体の体積を求めよ．

解答 (1) 右図を x に関する単純な領域とみる．p.35 の不定積分の公式(7)より，



$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2x}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\frac{\pi}{6}\right)dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $I=\displaystyle\iint_D e^{px}\cdot e^{qy}\,dx\,dy$ で変数に関して分離された形である．p.87 の(10)より

$$I=\left(\int_0^1 e^{px}dx\right)\left(\int_0^1 e^{qy}dy\right)=\left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^1\cdot\left[\frac{e^{qx}}{q}\right]_0^1=\frac{e^p-1}{p}\cdot\frac{e^q-1}{q}$$

問 題

2.1 つぎの2重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: 1\leqq y\leqq x\leqq 2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{1+\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right\}d\theta$ (p.65 の図を参照)

(3) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy, \quad D: \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq 1$ (p.53 の上図を参照)

寺田・木村, 「演習と応用 線形代数」(サイエンス社,2005)

4.5 正規直交基底

● 正規直交基底 ●

正規直交系　m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

をみたすとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を**正規直交系**であるという．正規直交系は 1 次独立である．

正規直交基底　基底が正規直交系のとき**正規直交基底**という．計量ベクトル空間 V は正規直交基底をもつ．$\boldsymbol{R}^n$ の標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は正規直交基底である．$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_m\}$ $(m = \dim V)$ を V の正規直交基底とする．

$$\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)_{\mathcal{B}}, \quad \boldsymbol{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{\mathcal{B}}$$

を V のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の $\mathcal{B}$ に関する成分とすると，内積は自然な内積のときと同じことになる．すなわち

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$$

グラム・シュミットの直交化法　V の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m, (m = \dim V)$ からつぎの手順によって正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を作る方法を**グラム・シュミットの直交化法**という．

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 \qquad \boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_2}{|\boldsymbol{y}_2|}$$

$$\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_3}{|\boldsymbol{y}_3|}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{x}_m - (\boldsymbol{x}_m \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 - (\boldsymbol{x}_m \cdot \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 - \cdots - (\boldsymbol{x}_m \cdot \boldsymbol{a}_{m-1})\boldsymbol{a}_{m-1} \qquad \boldsymbol{a}_m = \frac{\boldsymbol{y}_m}{|\boldsymbol{y}_m|}$$

正規直交基底の補充 (取り替え) 定理　$\dim V = m$ とする．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ を正規直交系とするとき，$m-d$ 個の V のベクトル $\boldsymbol{a}_{d+1}, \boldsymbol{a}_{d+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を選んで，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{a}_{d+1}, \boldsymbol{a}_{d+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V の正規直交基底であるようにすることができる．

● 2 組の正規直交基底の関係 ●　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V の正規直交基底，$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ を V のベクトルとし

$$\boldsymbol{a}'_j = p_{1j}\boldsymbol{a}_1 + p_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + p_{mj}\boldsymbol{a}_m \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

とする．このとき

$$\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_m \text{が正規直交基底} \iff P = [p_{ij}] \text{ が } m \text{ 次直交行列} \quad ({}^tPP = E)$$

例題 13　　　　　　　　　　　　　　　　**直交行列**

(a)　2 次の正方行列 $P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]$ が直交行列であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が互いに直交する単位ベクトル ($\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底) であることを示せ．

(b)　$\begin{bmatrix} a & -1/2 \\ 1/2 & b \end{bmatrix}$ が直交行列であるとき，a, b を求めよ．

解答　(a)　P が直交行列 (${}^tPP = E$) であると

$${}^tPP = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 \\ {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 & {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

から

$${}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 = |\boldsymbol{x}_1|^2 = 1, \quad {}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0, \quad {}^t\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2 = |\boldsymbol{x}_2|^2 = 1$$

だから $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は互いに直交する単位ベクトルである．

逆に，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が互いに直交する単位ベクトルなら $P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]$ は ${}^tPP = E$ をみたすから直交行列である．

(b)　(a) から

$$a^2 + (1/2)^2 = 1, \quad -a/2 + b/2 = 0, \quad (-1/2)^2 + b^2 = 1$$

だから

$$a = b = \pm\sqrt{3}/2$$

である．

注意　直交行列 P の行ベクトルも互いに直交する単位ベクトルである．一般に n 次の直交行列の列 (行) ベクトルは互いに直交する単位ベクトル ($\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基底) である．

問　題

13.1　つぎの行列が直交行列であるように a, b, c, d を定めよ．

(a)　$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & a \\ b & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$　　(b)　$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & b \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & c \end{bmatrix}$

(c)　$\begin{bmatrix} 5/13 & a & 0 \\ b & -5/13 & c \\ d & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13.2　2 次の直交行列 P は $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，または $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$，$(0 \leq \theta < 2\pi)$ であることを示せ．

2017年版センター試験過去問研究，数学IA, IIB
(教学社，2016)

第2問 標準 《極値，接線，面積》

(1) $f(x)=x^3-px$ より

$$f'(x)=\boxed{3}x^{\boxed{2}}-p$$

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，まず，$f'(a)=0$ が成り立つことから

$$3a^2-p=\boxed{0} \quad \cdots\cdots①$$

さらに，$x=a$ の前後での $f'(x)$ の符号が変化しなければならないので，$p>0$ でなければならない。なぜならば，$p\leqq 0$ のときはつねに $f'(x)=3x^2-p\geqq 0$ であるが，$p>0$ であれば，①を満たす実数 a $(\neq 0)$ が存在し，$f'(x)=3x^2-p=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$ となり，$x=a$ の前後でたしかに $f'(x)$ の符号が変化するからである。したがって，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものは $\boxed{①}$ である。

(2) 関数 $f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$a=\dfrac{p}{3}$ であるとして，①より

$$3\times\left(\frac{p}{3}\right)^2-p=0 \qquad \frac{p^2}{3}-p=0$$

$$p(p-3)=0 \qquad \therefore\ p=0,\ 3$$

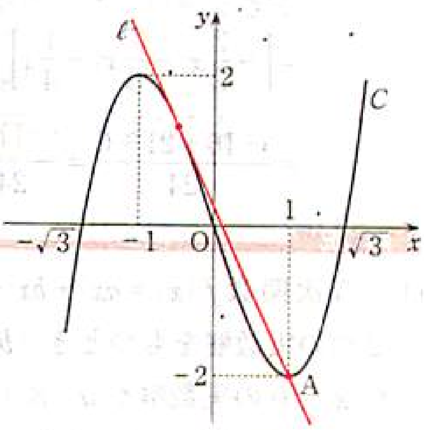
また，(1)より $p>0$ でなければならないから，$p=\boxed{3}$ である。このとき

$f(x)=x^3-3x,\quad f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

より $y=f(x)$ の増減表は右のようになり，$f(x)$ は $x=\boxed{-1}$ で極大値2をとり，$x=\boxed{1}$ で極小値 -2 をとることがわかる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

曲線 $C:y=f(x)=x^3-3x$ の接線で，点A $(1,\ -2)$ を通り傾きが0でないものを ℓ とするとき，接点の座標を $(b,\ f(b))$ とすれば，ℓ の方程式は



$$y-f(b)=f'(b)(x-b)$$

$$y=(\boxed{3}b^2-\boxed{3})(x-b)+f(b)$$

$$=(3b^2-3)(x-b)+b^3-3b$$

$$=(3b^2-3)x-2b^3 \quad \cdots\cdots②$$

と表せる。ℓ が点Aを通ることから

$$-2=(3b^2-3)-2b^3$$

整理すると

$$\boxed{2}b^3-\boxed{3}b^2+1=0$$

$$(b-1)(2b^2-b-1)=0 \qquad (b-1)^2(2b+1)=0$$

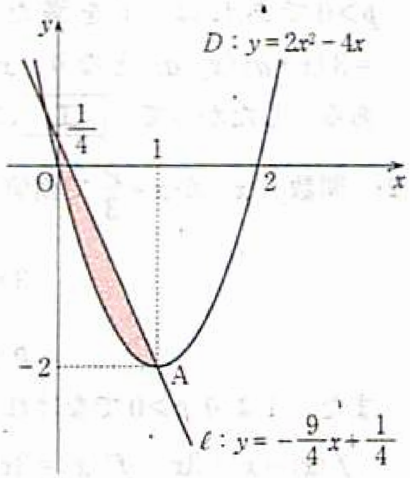
$$\therefore \quad b=\boxed{1},\ \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$$

$b=1$ のときには，接点がAとなり接線の傾きが0となってしまうので，$b\neq 1$ であるから，$b=-\dfrac{1}{2}$ である。よって，ℓ の方程式は，②より

$$y=\left(3\times\frac{1}{4}-3\right)x-2\times\left(-\frac{1}{8}\right)$$
$$=\frac{\boxed{-9}}{\boxed{4}}x+\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

点A$(1,\ -2)$ を頂点とし，原点を通る放物線 D の方程式は，$y=k(x-1)^2-2$（k は実数）が原点を通ると考えることにより $0=k-2$ すなわち $k=2$ であるから

$$y=2(x-1)^2-2$$
$$=\boxed{2}x^2-\boxed{4}x$$



ℓ と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq 0$ の表す領域に含まれる部分（右図の赤色部分）の面積 S は

$$S=\int_0^1\left\{\left(-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(2x^2-4x)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{-16+21+6}{24}=\frac{\boxed{11}}{24}$$

解説

(1)　3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）は，$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ が異なる2つの実数解をもつとき（$b^2-3ac>0$）極値をもつ。

$f'(x)=0$ の実数解が α，β（$\alpha<\beta$）であるとき，$a>0$ ならば $x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$，$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとり（山→谷），$a<0$ ならば $x=\alpha$ で極小値 $f(\alpha)$，$x=\beta$ で極大値 $f(\beta)$ をとる（谷→山）。$f'(x)=0$ が重解や虚数解をもつとき（$b^2-3ac\leqq 0$）は，$f(x)$ は極値をもたない。本問で，$f'(x)=3x^2-p=0$ が異なる2つの実数解をもつのは，$p>0$ のときである。