2.3　同次連立1次方程式の基本解

● 同次連立1次方程式 ●　連立1次方程式の定数項がすべて0のもの：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

すなわち　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

自明解　同次連立1次方程式の解である $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

非自明解　同次連立1次方程式の自明解以外の解.

$$\text{非自明解をもつ} \iff \operatorname{rank} A < n \iff A\text{は正則でない}$$

基本解　同次連立1次方程式が非自明解をもつとき，非自明解のうち $n-r$ 個 ($r = \operatorname{rank} A$) のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$($n$ 次元列ベクトル) で，

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \ldots\ \boldsymbol{x}_{n-r}] = n - r$$

となるもの.

一般解　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ を1組の基本解とするとき，任意の解 $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}\text{は任意定数})$$

と表せる．この右辺の形を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ の **1次結合**といい，任意定数 (パラメータ) を含む解を**一般解**という.

注意　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が同次連立1次方程式の解ならば，$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ も解である.

● 非同次連立1次方程式 ●

同伴な同次連立1次方程式　連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\neq \boldsymbol{0})$ に対し，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

特殊解　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のパラメータを含まない解.

非同次連立1次方程式の一般解　$\boldsymbol{x}_0$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は，つぎのように表せる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\text{特殊解}) + (\text{同伴な同次連立1次方程式の一般解}) \\ &= \boldsymbol{x}_0 + \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r} \end{aligned}$$

注意　非同次連立1次方程式の一般解を，特殊解と同伴な同次連立1次方程式の基本解の1次結合の和として表わす仕方は一意的でない.

例題 5　　　**特殊解と基本解**

つぎの連立1次方程式を解き，一般解を特殊解と同伴な同次連立1次方程式の基本解の1次結合の和の形で表せ.

$$\begin{cases} x - 3y - z + 2u = 3 \\ -x + 3y + 2z - 2u = 1 \\ -x + 3y + 4z - 2u = 9 \\ 2x - 6y - 5z + 4u = -6 \end{cases}$$

解答　右のようにはき出して解を求めると $y(=\alpha)$, $u(=\beta)$ を任意として，

x	y	z	u	定数	
1	−3	−1	2	3	
−1	3	2	−2	1	
−1	3	4	−2	9	
2	−6	−5	4	−6	
1	−3	−1	2	3	
0	0	1	0	4	②+①
0	0	3	0	12	③+①
0	0	−3	0	−12	④+①×(−3)
1	−3	0	2	7	①+②
0	0	1	0	4	
0	0	0	0	0	③+②×(−2)
0	0	0	0	0	④+②×3

$$\begin{cases} x = 7 + 3\alpha - 2\beta \\ y = \alpha \\ z = 4 \\ u = \beta \end{cases}$$

ゆえに $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

であり，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 = 4 - 2$$

だから $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (= \boldsymbol{x}_1)$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (= \boldsymbol{x}_2)$ が1組の基本解であり $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} (= \boldsymbol{x}_0)$ が特殊解である．以上から解を $\boldsymbol{x}$ とすると $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ である.

問　題

5.1　つぎの同次連立1次方程式を解き，1組の基本解を求めよ.

(a) $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$　(d) $x + y - 2z + u = 0$

5.2　例題3および問題3.1の解の特殊解と同伴な同次連立1次方程式の1組の基本解を求めよ.

5.3　A, B を n 次正方行列とする．AB が正則 $\Longrightarrow$ A, B が正則　を示せ.