4.3　高次偏導関数，テーラーの定理と2変数関数の極値

● 高次偏導関数 ●　関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ はまた x,y の関数であるから，これらの偏導関数も考えられる．これらを $f(x,y)$ の **2 次偏導関数**という．2 次偏導関数にはつぎの 4 つがある．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

これらをそれぞれ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$$

で表す．さらに 3 次，4 次 $\cdots$ の偏導関数も考えられるが，2 次以上の偏導関数をまとめて**高次偏導関数**という．

2 次偏導関数 f_{xy}，f_{yx} は必ずしも一致しない（p. 76 の例題 5 参照）が，つぎのことが成り立つ．

定理 11　（偏微分の順序変換）　$f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ が連続ならば，

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

一般に高次偏導関数の連続性を仮定すれば，その偏微分の順序は問題にならない．

● 偏微分作用素 ●　a,b が定数のとき，関数に作用する**偏微分作用素** $a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}$ を

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=a\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

と定義する．

いま，$z=f(x,y)$, $x=a+ht$, $y=b+kt$ で，$f(x,y)$ が必要な回数だけ連続な偏導関数をもてば，p. 71 の定理 9 より

$$\frac{d}{dt}f(a+ht,b+kt)=hf_x(a+ht,b+kt)+kf_y(a+ht,b+kt)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dt^n}f(a+ht,b+kt)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+ht,b+kt)$$

● テーラーの定理 ●　1 変数の場合には，高次導関数をもつ関数についてテーラーの定理が成り立った．2 変数の関数についても高次偏導関数をもつ関数についてつぎの定理が成り立つ．

定理 12　（テーラーの定理）　関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) を含む領域 D で n 次までの連続な偏導関数をもてば，$(a+h,b+k)\in D$ のとき，

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)\quad (0<\theta<1)$$

となる θ が存在する．

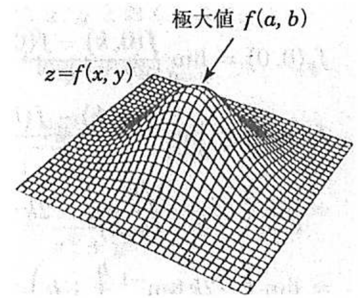
とくに $n=1$ のときは，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)$$
$$(0<\theta<1)$$

となるが，これを **2 変数関数の平均値の定理**という．

また上の定理で $(a,b)=(0,0)$ とし，h, k の代りに x, y としたときは，**マクローリンの定理**という．

● 2 変数関数の極値 ●　$z=f(x,y)$ を点 (a,b) に近い点で考えたとき，点 (a,b) と異なるすべての点 (x,y) に対して，$f(a,b)>f(x,y)$ ならば $f(x,y)$ は点 (a,b) で**極大**で $f(a,b)$ を**極大値**という．極小値についても同様である．極大値，極小値をあわせて**極値**という．



偏微分可能な関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとれば $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ である．この関係を満足する点で $f(x,y)$ が極値をとるかどうかはつぎの定理を用いて判定する．

定理 13　（極値の判定）　関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) において連続な 2 次偏導関数をもち，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ であるとする．

$$D=\{f_{xy}(a,b)\}^2-f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

とおくとき，つぎのことが成り立つ．

(i)　$D<0$,　$f_{xx}(a,b)>0$　ならば　$f(a,b)$　は極小値
　　$D<0$,　$f_{xx}(a,b)<0$　ならば　$f(a,b)$　は極大値

(ii)　$D>0$　のときは　$f(a,b)$ は極値でない．

例題 7 ── **2 変数の関数の極値**

つぎの関数の極値をもとめよ．

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

[解答] p. 75 の定理 13 を用いる．

$f_x=3x^2-3y,\ f_y=3y^2-3x$ であるので，$f_x=0,\ f_y=0$ を解く．つまり，

$\begin{cases} x^2-y=0\cdots① \\ y^2-x=0\cdots② \end{cases}$ を満足する x, y を求める．

②より $y^2=x$ となり，これを①に代入すると，$y^4-y=0$. これを因数分解して，$y(y-1)(y^2+y+1)=0$. $y^2+y+1=(y+1/2)^2+3/4>0$ であるので $y=0,1$.

これらを②に代入すると，つぎのような 2 組の解を得る．

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

つぎに，$f_{xx}=6x,\ f_{yy}=6y,\ f_{xy}=-3$ であるから

$$D(0,0)=f_{xy}^2(0,0)-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=(-3)^2-0\times 0=9>0$$

となるので点 $(0,0)$ は極値ではない．

$$D(1,1)=f_{xy}^2(1,1)-f_{xx}(1,1)\times f_{yy}(1,1)=(-3)^2-6\times 6=-27<0$$

$$f_{xx}(1,1)=6>0$$

であるので，$f(1,1)=-1$ は極小値である．

問題

7.1 つぎの関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y)=xy(x^2+y^2-1)$

(2)* $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

7.2 つぎの関数の極値を吟味せよ．

(1) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)\quad (0<x<\pi,\quad 0<y<\pi)$

(2)* $f(x,y)=2x^4-5x^2y+2y^2$

注意 7.1, 7.2 ともに計算が長くなるので途中で投げ出さないこと．

* p. 75 の定理 13 は $D=0$ のときは使えない．このとき $f(a,b)$ は極値のときもあり，極値でないこともある．2 次偏微分係数だけでは極値かどうか判定できないので他の方法を考えなくてはならない．7.1 (2), 7.2 (2)の場合のように判定できるものもあるが一般には容易ではない．

4.4 陰関数の存在定理，陰関数の極値，包絡線

● 陰関数 ● 変数 x, y の間に $f(x,y)=0$ という関係があるとき，これを一価関数 $y=g(x)$ の形に簡単に書き直せる場合もあるが必ずしもそうでないこともある．

たとえば円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ などは $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ と直せるが一価ではないし，$x^3+y^3-3xy=0$ はそれも難しい．

そこで $f(x,y)=0$ の形のままで y を x の関数といえるように，x に対して y が 2 つ以上定まることを防いだり，微分可能性のためにつぎの定理のような条件をつけて考える．なお $y=g(x)$ が $f(x,\ g(x))=0$ をみたすとき，$y=g(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義された**陰関数**という．

定理 14 （**陰関数の存在定理**） 関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) を含む領域で連続な偏導関数をもち，

(1) $\begin{cases} f(a,b)=0 \\ f_y(a,b)\neq 0 \end{cases}$

と仮定すると，$x=a$ を含むある区間を定義域とする関数 $y=g(x)$ でつぎの条件をみたすものが一意に定まる．

(2) $\begin{cases} g(a)=b \\ f(x,g(x))=0 \\ g'(x)=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \end{cases}$

さらに，$f(x,y)$ が連続な 2 次偏導関数をもてば，次式が得られる．

(3) $g''(x)=-\dfrac{(f_y)^2f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+(f_x)^2f_{yy}}{(f_y)^3}$

● 陰関数の極値 ● $f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=g(x)$ の極値を求めるためには，

$$g'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=0,\quad f(x,y)=0$$

をみたす点 (x,y) を求め，この点における $g''(x)$ の符号をみればよいが $g'(x)=0$ のときは $f_x(x,y)=0$ であるから問題にしている点では，上の (3) よりつぎの式を得る．

(4) $g''(x)=-f_{xx}(x,y)/f_y(x,y)$

ここでは，簡単のために y が x の関数で表される場合のみ扱ったが，x と y の関係は対称的であるから，$f_x(a,b)\neq 0$ ならば，点 (a,b) の近くで，$x=h(y)$ の形の陰関数をもつことがわかる．