リングバッファ上の系に対する確率的対称性簡約

関 澤 俊 弦[†1,†2] 高 橋 孝 一[†2] 高 橋 和 子[†3]

確率的な振舞いを示す系に対する形式手法の一つとして確率モデル検査がある．通常のモデル検査同様，確率モデル検査では状態爆発が起こりうる．著者らはこの問題への取り組みとして，リングバッファ上で確率的な振舞いを示す系に対する確率的対称性簡約の手法を提案した．Herman の自己安定化アルゴリズムなど 3 事例に適用した結果を通じて，提案手法の適用可能性と課題を示す．

1. はじめに

モデル検査はその技術の成熟と共に使用されるようになってきた．しかし，状態爆発問題は未だに取り組む必要がある問題である．状態爆発への取り組みとして，著者らはリングバッファ上の確率的な振る舞いを示す系に対する確率的対称性簡約を提案した[1),2)]．提案手法はリングバッファの周期的境界条件を利用する点が特徴である．提案手法の事例として，イジングモデル，船舶自動認識装置 (AIS)，Herman の自己安定化アルゴリズムに適用し，状態削減を行なえることを示すと共に一定の性質に関して状態削減後のモデルでも検証可能であることを示した．本論文では Herman のアルゴリズムへの適用結果を中心に取り上げ，提案手法の適用可能性と問題点を示す．

本論文の構成は以下の通りである．2 節でリングバッファに上の系に対する確率的対称性簡約を示す．続く 3 節で適用事例の一つである Herman の自己安定化アルゴリズムへの適用結果を示す．最後に 4 節で提案手法の課題に関して述べる．

2. リングバッファに対する確率的対称性簡約

2.1 対称性簡約

状態遷移系 $\mathcal{M} = (S, R)$ は，状態の集合 S と遷移関係 $R \in S \times S$ で定義される．S 上の同値関係に対して各同値類の代表元 1 つずつを含んだ状態集合を $\overline{S}$ とする．各状態 $s \in S$ に対して，それの属する同値類の代表元を返す関数 $rep : S \to \overline{S}$ を定義することにより，新たな遷移関係 $\overline{R} = \{(rep(s), rep(s'))|(s, s') \in R\}$ を定義する．このようにして得られる状態遷移系 $\overline{\mathcal{M}} = (\overline{S}, \overline{R})$ を商モデルと呼ぶ．一般に，商モデルの構築は次の手順で行われる．

Step 1 ：商状態 $\overline{S}$ の決定

Step 2 ：商状態間の遷移 $\overline{R}$ の決定

2.2 Step 1: 商状態の決定

要素数 m のリングバッファの集合を Buf とする．著者らは論文[1)] で，リングバッファ $b, b' \in Buf$ と整数 δ $(0 \leq \delta \leq m-1)$ に対して次の定義で与えられる関数 $\mathit{Shift}_\delta : Buf \to Buf$ を提案した．

$$b'[i] = b[(i - \delta + m) \bmod m]$$

関数 Shift_δ は b のすべての要素の添字を移した b' を得る．また，b と b' のすべての要素が等しいときに真，そうでないときに偽となる述語 $\mathit{Equiv}(b, b')$ を定義した．

商モデルの状態の集合 $\overline{S}$ は，具体モデルの状態毎に $\mathit{Equiv}(b, \mathit{Shift}_\delta(b))$ を計算することにより，各状態が属する同値類を決定することにより実現できる．ここで，$|\overline{S}|$ の理論的最小値は $|\mathit{Buf}|/m$ である．

2.3 Step 2: 商状態間の遷移の決定

Schweitzer は商状態間の遷移確率に関するサーベイを発表している[3)]．状態 s_j における確率ベクトルを ς_j とする．ここで，ς_j は，状態 s_j から出る遷移確率を要素にもつ．すると，$\overline{S}$ の要素の組 $\overline{s}, \overline{s}' \in \overline{S}$ 間の遷移確率 $\Pr(\overline{s}, \overline{s}')$ は次のように表わされる．

$$\Pr(\overline{s}, \overline{s}') = \frac{\sum_{s_j \in \overline{s}} \sum_{s_i \in \overline{s}'} \varsigma_j \Pr(s_j, s_i)}{\sum_{s_k \in \overline{s}} \varsigma_k}$$

図 1 に，具体モデルと対応する商モデルの例を示す．

†1 大阪学院大学
†2 産業技術総合研究所
†3 関西学院大学

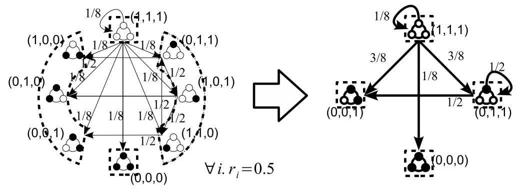

図 1 Herman の自己安定化アルゴリズム (プロセス数 $n = 3$) の具体モデルと商モデル (遷移は一部のみ記載)

表 1 確率的対称性簡約の適用結果

	商モデル		具体モデル	
n	$\lvert\overline{S}\rvert$	$\lvert\overline{R}\rvert$	$\lvert S\rvert$	$\lvert R\rvert$
3	4	12	8	28
5	8	44	32	244
7	20	224	128	2,188
9	60	1,500	512	19,684
11	188	11,156	2,048	177,148
13	632	89,408	8,192	1,594,324

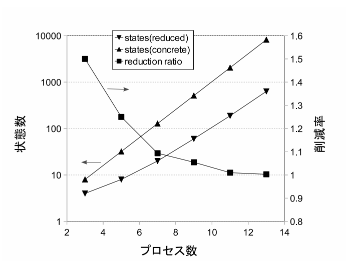

図 2 プロセス数に対する商モデルの正規化した状態数

3. Herman のアルゴリズムへの適用結果

3.1 状態数削減結果

Herman が提案した確率的自己安定化アルゴリズム[4] に対して提案手法を適用したときの，具体モデルと商モデルの状態数と遷移数を表 1 に示す．

ここで，関数 $Shift_\delta$ による削減率を考えるために，具体モデルおよび商モデルの状態数と，正規化した削減率 $n \cdot |\overline{S}|/|S|$ を図 2 に示す．図 2 の X 軸はプロセス数，第 1Y 軸は状態数，第 2Y 軸は正規化した状態数である．図 2 で見て取れるように，プロセス数の増加に伴い正規化した削減率は理論的最小値に漸近していくことが分かる．削減率が理論的最小値に漸近していく傾向は状態の要素が二値であるイジングモデルでも観察されたが，状態の要素が複数の値を取る AIS では観察されなかった．

3.2 検　　証

本節では，Herman の自己安定化アルゴリズムの商モデルに対して，アルゴリズムが満たす性質である収束性，“任意の初期状態に対してトークン数が 1 となる安定状態に到達する”，の検証結果を示す．PRISM の拡張された PCTL で記述すると次の式で表せる．

```
"init"=>P>=1[F"stable"]
```

ここで，`"stable"`は安定状態を表わし，トークン数の定義より次のように定義される．

```
"stable"=(x1=x2?1:0)+(x2=x3?1:0)+...=1
```

検証の結果，商モデル上で，プロセス数 $n = 3 \sim 13$ に対して収束性は成り立つ，との結果が得られた．収束性は Herman が証明しており，かつ，具体モデルでも成り立つことが示されているが，提案手法を適用した商モデルでも同等の検証を行なえることが示された．

4. 課　　題

自己安定化アルゴリズムの多くはリングバッファ上で定義され，対称性をもつことが多いため，提案手法は Herman のアルゴリズム以外にも適用可能であると考えられる．他のアルゴリズムへの提案手法の適用は将来の課題としたい．また，適用対象をリングバッファに限定することなく，適用可能な対称を検討したい．

提案手法の 3 事例で，イジングモデルと Herman のアルゴリズムでは削減率は理論的最小値に漸近する．しかし，提案手法の適用のみでは，これ以上の削減率の達成は不可能である．AIS への適用では削減率が理論的最小値に漸近する傾向が見られなかったことから，提案手法適用時の削減率を理論的に解析し，適用可能性を検討することも今後の課題である．

加えて，提案手法の適用では状態削減が十分ではない場合もある．述語抽象化など他の手法との組合せによりさらなる状態削減を図る手法を検討したい．

参　考　文　献

1) T. Sekizawa, T. Toyoshima, K. Takahashi and K. Takahashi: *Probabilistic Symmetry Reduction for a System with Ring Buffer*, IEICE Trans., Vol.E94-D, No.5, pp.967–975 (2011).
2) 関澤俊弦，高橋孝一，高橋和子: ケーススタディ: Herman の確率的自己安定化アルゴリズムの状態削減と検証, ディペンダブルシステムワークショップ & シンポジウム (DSW & DSS 2011) (2011).
3) P. J. Schweitzer: *A Survey Of Aggregation-disaggregation In Large Markov Chains*, 1st Int. Conf. on the Numerical Solution of Markov Chains January 8-10, pp.53–80, (1990).
4) T. Herman: *Probabilistic Self-Stabilization*, Inf. Process. Lett, Vol. 35, No. 2, pp. 63-67 (1990).