

定性的に表現された地質柱状図からの地層モデルの生成

Generation of Geological Models from Qualitatively Represented Columnar Sections

高橋 和子^{1*} 豊嶋 泰都¹
Kazuko Takahashi¹ Taito Toyoshima¹

¹ 関西学院大学
¹ Kwansai Gakuin University

Abstract: This paper discusses the problem of inferring geological structures that include unconformity surface from columnar sections. We use the qualitative model in which the geological structure is represented by focusing only on the adjacency and order relationships between layers. We formalize the problem as that of region division under a specific condition and show that the number of solutions is related to well-known Catalan number. We also discuss the cases under the modified conditions.

1 はじめに

地質構造の解析は防災対策や資源発掘の観点から重要である。解析においては、すべてが露出している地層は少ないため複数の地点でデータを収集し、それらをつなぐ部分の構造を推定するということが一般に行われている [2]。しかし専門家ごとに解釈が異なり、説得力のある根拠が示されることは少ない。塩野らはこの課題を数学的に扱うために地質構造の論理モデルを提案した [5]。谷内らは定性的アプローチ [1] として、数値を使用せず層同士の隣接関係や傾斜など必要な性質にのみ着目した表現方法を提案し、地層の構造や概形を表現したり推論する手法を述べた [6]。本研究は、谷内らの定性的アプローチに基づき、対象とする地層が不整合面を含む場合に、ボーリング調査で得られた柱状図から推測される地質構造をすべて表示するシステムの作成から派生したものである。

この定性的なモデル上では各層を領域として記号で表現しているため、地質構造を考える問題は一種の領域分割問題を解く過程と捉えられる。本稿ではこの問題を、与えられた条件を満たす領域分割問題として定式化し、解の個数がカタラン数 [3] になることを示す。さらに、条件を強化したり緩和することで解の個数がどのように変化するかについて考察する。

本稿の構成は以下の通りである。2 節では、研究の発端となった地質構造推論の問題および定性的モデルを示す。3 節では、問題を定式化し、カタラン数との関

係を示す。4 節では、条件を変更したときの解について考察する。最後に 5 節で結論と今後の課題を述べる。

2 準備

2.1 不整合面

地層形成過程で古い層の上に新しい層が堆積することを地層累乗の法則といい、一般にこれが成り立つものとされている。また、各層は連結しており、層同士の隣接関係や順序関係は変化しないという特徴がある。通常平らな層が積み重なっていくが、ある時点で傾斜したり隆起したりしたあと時間を経てからさらに層が堆積すると、不整合面ができる。本研究では、不整合面を含む地層を対象に、比較的近い 2 地点で得たボーリング柱状図に対して、これらの間の層の重なり方や構成を推論する。

単純化のため、以下を仮定する。

- 単一のボーリング柱状図には層が 2 つ以上存在する
- 単一のボーリング柱状図には同一の層は出現しない
- 2 つのボーリング柱状図には 1 つ以上共通の層が出現する
- 出現する層の新旧はあらかじめ判明している

*連絡先: 関西学院大学工学部
〒 669-1330 三田市学園上ヶ原 1 番
E-mail: ktaka@kwansai.ac.jp

2.2 定性的モデル

モデルとして、地層を垂直方向に射影した画像の一部を矩形で切り取った図を考える。図 1(a) に不整合面を含む地層の例を、図 1(b) にその一部を矩形で切り出したときのモデルの例を示す。

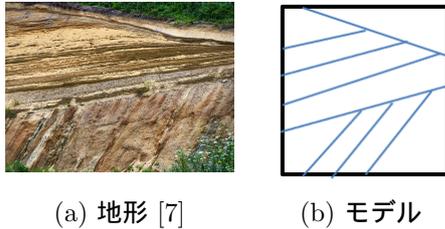


図 1: 不整合面の例

このモデル上で、与えられた 2 つの柱状図に対してそれらの間の地質構造として可能なものすべてを求め、単一の柱状図は層の列として表現する。層同士の接続関係と順序のみに着目し層の厚みや正確な傾斜角度等は無視する。2 つの柱状図を左辺および右辺とする矩形としてモデル化し、左右の辺で同一の層が出現するときそれらが連続していると考え、層の境界が一致するものを線で結ぶことによって地質構造を表す (図 2(a))。層の厚みは無視しているため、層同士の境界線の傾斜方向は非決定的だが、すべて同一の地質構造と見なす。不整合面があると、左右の辺双方に共通して出現しない層が存在する場合がある。このとき 2 つの柱状図の間の構造として複数のものが考えられる (図 2(b))。

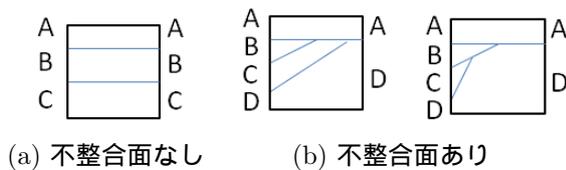


図 2: 地質構造を表すモデルの例

2.3 カタラン数

カタラン数は以下のように定義される自然数の列 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ である [3]。

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad (n \geq 0)$$

したがって、 $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, \dots$ となる。

カタラン数はいくつかの問題の解と対応することが知られている。代表的なもの 1 つに二分木との対応関係があり、 C_n は分岐数 n 、すなわち葉の個数 $n+1$ の順序つきラベルなし二分木 (以後二分木と略す) の総数であることがわかっている。

3 可能な地質構造の列挙

3.1 問題の定式化

まず、不整合面を含む地層を対象に、2 つのボーリング柱状図の間の可能な地質構造をすべて求める、という問題を定式化する。

順序付きの複数の点 P_1, \dots, P_n が与えられたとき、2次元平面上の矩形の左右の辺上で頂点とは異なる位置にこれらを配置する。順序を \prec で表し、 $P_1 \prec \dots \prec P_n$ とする。各 P_i ($1 \leq i \leq n$) を片方の端点とする線分を引くことで矩形を $n+1$ 個の領域に分割する。

P_1, \dots, P_n の中で左辺上の点の集合を \mathcal{L} 、右辺上の点の集合を \mathcal{R} とし、左辺への点の配置を $lc = (\mathcal{L}, \mathcal{R})$ と記述する。このとき、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{R} = \{P_1, \dots, P_n\}$ 、 $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ である。ただし、 $\mathcal{L} = \{Pl_1, \dots, Pl_s\}$ 、 $Pl_1 \prec \dots \prec Pl_s$ 、 $\mathcal{R} = \{Pr_1, \dots, Pr_t\}$ 、 $Pr_1 \prec \dots \prec Pr_t$ 。 Pl_1, \dots, Pl_s は左辺上に上から順に並んでおり、 Pr_1, \dots, Pr_t は右辺上に上から順に並んでいる。正確な座標を考えず点同士や線同士の相対的位置関係のみを考えており、相対的位置関係が等しいものは同一と見なしている。

矩形の左上の頂点を P_0 、右上の頂点を Q_0 、上辺を B_0 とする。すべての i ($1 \leq i \leq n$) に対して以下の [条件] を満足するように P_i から Q_i に直線 B_i を引くことで得られる図形を分割図と呼び、 B_0, B_1, \dots, B_n を境界線と呼ぶ。

[条件]

1. 任意の i に対して Q_i は B_j ($0 \leq j < i$) 上にある
2. 任意の i, j ($0 \leq i < j \leq n$) に対して、 B_i, B_j は交差しない。
3. 任意の i, j ($0 \leq i < j \leq n$) に対して、 Q_i と Q_j は重ならない。

この条件から境界線が左辺と右辺を直接結ぶことはなく、下辺に端点をもつこともない。(これらの場合については 4.2 節で述べる。)

lc が与えられたときに分割図すなわち B_1, \dots, B_n の引き方をすべて求める。

3.2 点が片方の辺上にのみ存在する場合

まず, $lc = (\mathcal{L}, \emptyset)$ の場合, すなわち左辺上にのみ n 個の点が与えられた場合について考える. $lc = (\emptyset, \mathcal{R})$ の場合も同様に考えられる.

以下の手順に従って B_1, \dots, B_n を矩形の上部から順に引いていく.

P_1 から B_0 に対して境界線 B_1 を引き, B_0 上の端点を Q_1 とする.

P_2 から B_0 または B_1 に対して境界線同士が交差しないように B_2 を引き, 端点を Q_2 とする.

⋮

P_n から B_0, B_1, \dots, B_{n-1} のいずれかに対して境界線同士が交差しないように B_n を引き, それらとの端点を Q_n とする.

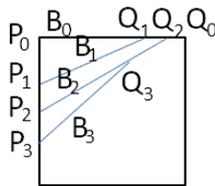


図 3: 3本の境界線の引き方の例

B_k ($1 \leq k \leq n$) と B_{k-1} は明らかに交差しないので, Q_k は常に B_{k-1} 上にとることができる. また, 右辺に対して境界線を引くことはないので, Q_1, \dots, Q_{k-1} がどの境界線上にあっても B_k は B_0 と交差しないように引くことができる. したがって B_1, \dots, B_{k-1} まで境界線が引かれているとき, B_k の引き方は最小 2 通り, 最大 k 通りある.

命題 1. $lc = (\mathcal{L}, \emptyset)$ の場合, [条件] を満たす n 本の境界線を引くことで得られる分割図の数はカタラン数 C_n である. ただし $C_0 = 1$ とする.

C_n は分岐数 n , すなわち葉の個数 $n+1$ の二分木の数になることから, 各境界線と二分木の分岐ノードを対応させる. 境界線を矩形の上から順にひいていく手順と二分木を根ノードから構築していく手順を対応づける.

直観的には, 境界線を引くときに, もっとも近い線分に引くとき二分木の左子ノードに, 次に近い線分に引くとき右子ノードに, その次に近い線分に引くときは一段二分木をさかのぼった祖先ノードの右子ノードに, ... 新たなノードを付加する, のように二分木を構成していく.

図 4(a)(b)(c) に $n = 1, 2, 3$ それぞれの場合を示す.

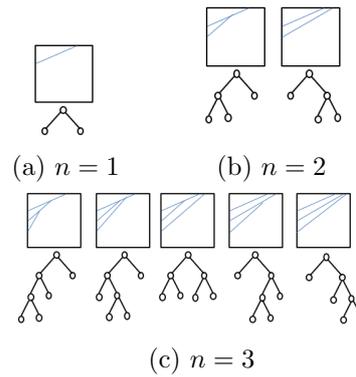


図 4: 分割図と二分木の対応: 左辺のみに端点が存在するとき

[二分木から分割図]

二分木を深さ優先で左から走査し, 以下の規則にしたがって対応する境界線 B_1, \dots, B_n を引いていくことにより, 対応する分割図を得る.

N_1, \dots, N_k を二分木のノードとする.

根ノード N_1 に対応する境界線を B_1 とする.

N_1, \dots, N_k がそれぞれ B_1, \dots, B_k に対応するとする. Q_k が B_m ($0 \leq m \leq k-1$) 上にあるとき, 線分 $P_k Q_k$ を $lt(Q_k)$, B_m の Q_k より右側の線分を $rt(Q_k)$ と, それぞれおく. 二分木において, N_k が N_m の左子ノードならば $lt(Q_m)$ に, 右子ノードならば $rt(Q_m)$ に B_{k+1} を引く.

Q_1, \dots, Q_n の位置関係から境界線同士は互いに交差しない.

図 5(a) に $n = 8$ の二分木の例を示し, 図 5(b)(c)(d) にこれに対応する分割図を示す.

1. N_2 は N_1 の左子ノードなので, B_2 は $lt(Q_1)$ (図 5(b) の赤線分) に対して引く.
2. N_3 は N_2 の左子ノードなので, B_3 は $lt(Q_2)$ (図 5(c) の赤線分) に対して引く.
3. N_4 は N_2 の右子ノードなので, B_4 は $rt(Q_2)$ (図 5(c) の緑線分) に対して引く.
4. N_5 は N_4 の左子ノードなので, B_5 は $lt(Q_4)$ (図 5(d) の赤線分) に対して引く.
5. N_6 は N_4 の右子ノードなので, B_6 は $rt(Q_4)$ (図 5(d) の緑線分) に対して引く.
6. N_7 は N_1 の右子ノードなので, B_7 は $rt(Q_1)$ (図 5(b) の緑線分) に対して引く.

[分割図から二分木]

与えられた分割図をもとに以下の規則に従って二分木を構築することで, 対応する二分木を得る.

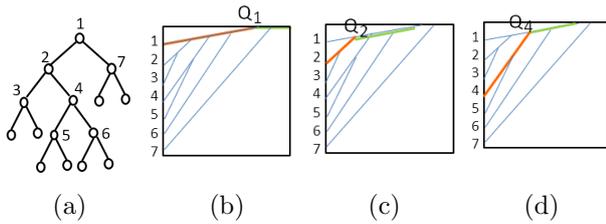


図 5: 二分木から分割図への変換

B_1 に対するノード N_1 を根ノードとする .

B_1, \dots, B_k がそれぞれ N_1, \dots, N_k と対応するとする . B_{k+1} が B_m ($0 \leq m \leq k$) に引かれている , すなわち Q_{k+1} が B_m 上にあるとする . $m = k$ のときは , N_m の左子ノードとして N_{k+1} を付加する . $m < k$ のときは , B_m 上にある端点の中で Q_k の左側でもっとも Q_k に近い端点 Q_h に対するノード N_h の右子ノードとして N_{k+1} を付加する .

図 6 において , B_6 (赤線分) は B_1 (黒太線分) に引かれている . すなわち Q_6 が B_1 上にある . B_1 上にある端点の中で Q_6 の左側でもっとも Q_6 に近い端点は Q_4 なので , Q_4 に対するノード N_4 の右子ノードとして N_6 を付加する .

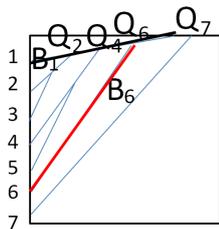


図 6: 分割図から二分木への変換

この対応によって分岐数 n の任意の二分木に対応する分割図が唯一存在する .

3.3 点が左右の両辺に存在する場合

$lc = (\mathcal{L}, \mathcal{R})$ において $\mathcal{L}, \mathcal{R} \neq \emptyset$ の場合は左右の辺にわかれて端点が存在する . 本節では , 前節で述べた手順を修正して \mathcal{L}, \mathcal{R} が空集合かどうかにかかわらず分割図と二分木を対応させる方法を述べる .

点 P_i ($1 \leq i \leq n$) から既存の境界線 B_j ($0 \leq j < i$) 上の適切な点 Q_i に対して B_i を引くとき , 線分 $P_i Q_i$ の長さで最小のものを P_i から B_j への距離と定義する . また , $P_i \in \mathcal{R}$ の場合は $rt(Q_i)$ は B_j の Q_i より左側の線分をさす .

境界線を引くときに , P_i からの距離が最小の境界線に対して引く場合は二分木の左子ノードに , 次に距離

の小さな境界線に対して引く場合は右子ノードに , 3 番目以降は二分木を一段ずつさかのぼった祖先ノードの右子ノードに , ... 新たなノードを付加する , のように二分木を構成していくことで , $\mathcal{R} = \emptyset$ の場合と同様に分割図と二分木を 1 対 1 対応させることができる .

図 7 に $lc = (\{P_1, P_3\}, \{P_2\})$ の場合を示す .

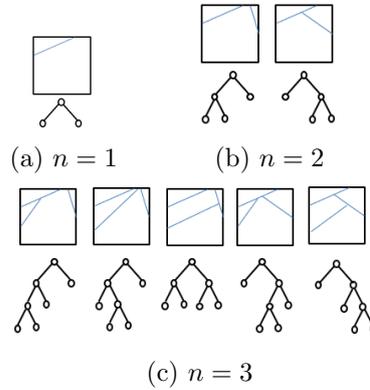


図 7: 分割図と二分木の対応: 左右両辺に端点があるとき

したがって , 以下の命題が成り立つ .

命題 2. lc が与えられたとき , [条件] を満たす n 本の境界線を引くことで得られる分割図の数はカタラン数 C_n である . ただし $C_0 = 1$ とする .

3.4 分割図全体の性質

n, lc が与えられたときの分割図の集合を $D_n(lc)$ と標記し , すべての lc についての分割図の和集合を D_n と標記する . $lc \neq lc'$ ならば $D_n(lc) \cap D_n(lc') = \emptyset$ である . 命題 2 より $|D_n(lc)| = C_n$ である . n 個の点が与えられたとき , 左右対称なものは同一と見なすと , lc は 2^{n-1} 通りあるので , $|D_n| = 2^{n-1} \cdot C_n$ となる .

矩形の左上 , 左下 , 右上 , 右下の頂点をそれぞれ $Pl_0, Pl_{s+1}, Pr_0, Pr_{t+1}$ とする . $d \in D_n(lc)$ において線分 $Pl_{i-1}Pl_i$ ($1 \leq i \leq s+1$) を含む領域は一意的に定まるので , これを Rl_i とおく . 同様に線分 $Pr_{i-1}Pr_i$ ($1 \leq i \leq t+1$) を含む領域は一意的に定まるので , これを Rr_i とおく . $S_d = \{Rl_1, \dots, Rl_{s+1}\} \cup \{Rr_1, \dots, Rr_{t+1}\}$ とする . 下辺に接する領域は常に 1 つなので , $Rl_{s+1} = Rr_{t+1}$ が成り立つ . $s+t = n$ なので , 矩形は $n+1$ 個の領域に分割される . 異なる $R, R' \in S_d$ が境界線を共有するとき , R, R' は隣接するという . $d \in D_n(lc)$ におけるすべての隣接ペアの集合を A_d とすると , 以下の性質が成り立つ .

命題 3. 1. $\forall d_1, d_2 \in D_n(lc); d_1 \neq d_2 \Rightarrow A_{d_1} \neq A_{d_2}$.

2. $\exists d; \forall R, R' \in S_d, R \neq R'; (R, R') \in A_d$.

1 番目は、分割図においては領域同士の隣接関係がすべて一致するものはないことを示す。2 番目は、任意の領域ペアについて、それらが隣接可能になるような分割図が存在することを示す。

4 条件の変更

4.1 強化

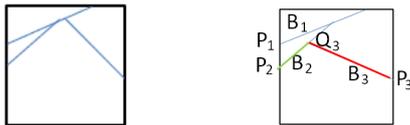
前節で得られた分割図はすべて地層の基本的な性質を満たすが、実際には出現しにくいものを含む。そのうちの 1 つが同一の境界線に端点をもち、もう一方の端点が左右の辺上にわかれて存在し「八」の字を形成するようなパターンである (図 8(a))。この形を広げた形状と呼ぶ。広がった形状を持つ地層は説得力のある生成過程を示すことができず実際にもあまり見かけない。

本節では、広がった形状を除外するように [条件] を強化したときの分割図の数について考察する。 $D_n(lc)$ の中で広がった形状にならない分割図の集合を $D'_n(lc)$ とし、すべての lc に対する和集合を D'_n と表記する。

広がった形状は、 n 本の境界線を引く場合に、 $lc = (\mathcal{L}, \mathcal{R})$ で $P_k \in \mathcal{L}/\mathcal{R}, P_{k+1} \in \mathcal{R}/\mathcal{L}$ ($1 \leq k \leq n-1$) において生じる。このとき境界線 B_k と B_{k+1} が左右逆側からひかれる。これを反転と呼び、 J_k と表す。なお、左右の対称性があるので $P_1 \in \mathcal{L}$ の場合のみについて考える。

$P_1, \dots, P_k \in \mathcal{L}, P_{k+1} \in \mathcal{R}$ の場合、命題 2 から B_1, \dots, B_k の引き方は C_k 通りであり、 B_{k+1} の引き方は B_k に対して引くという 1 通りしかない。また、 B_{k+1} を引いた後、 B_{k+2} は $lt(Q_k), rt(Q_k)$ に対して引く 2 通りである。これは、 B_k を B_0 とした場合に帰着できる。したがって、 n 本引く場合に反転が J_k ($1 \leq k \leq n-1$) のみならば、 B_{k+1} 本目以降の引き方は C_{n-k} 通りになる。この場合、分割図の数は $C_k \cdot C_{n-k}$ になる。

図 8(b) は、 J_2 が存在する例であり、 B_3 をひいたあとの $lt(Q_3), rt(Q_3)$ をそれぞれ赤線分、緑線分で示している。



(a) 広がった形状の例 (b) 境界線の引き方

図 8: 広がった形状

この考察を踏まえ、以下の命題を得る。

命題 4. n 本引く場合、 lc に反転 J_{k_1}, \dots, J_{k_t} が存在するとする (ただし $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n-1$)、このとき、

$$|D'_n(lc)| = C_{k_1} \cdot C_{k_2 - k_1} \cdot C_{k_3 - k_2} \cdot \dots \cdot C_{k_t - k_{t-1}} \cdot C_{n - k_t}$$

である。

D'_n はすべての lc についての $D'_n(lc)$ の和集合になる。 lc における反転が 0 個の場合、すなわち片側の辺のみに端点が存在する場合は、明らかに広がった形状にならない。左右対称なものを同一とすると $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n-1$ を満たす k_1, \dots, k_t の組み合わせは 2^{n-1} なので、 $2^{n-1} - 1$ の場合それぞれの解の数をたしあわせることで D'_n の総数を得る。

たとえば $n = 3$ のとき lc は $2^2 - 1 = 3$ 通りで、全 lc について $|D'_3(lc)|$ の和をとると、

$$|D'_3| = C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_1 \cdot C_1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

$n = 4$ のとき lc は $2^3 - 1 = 7$ 通りで、全 lc について $|D'_4(lc)|$ の和をとると、

$$\begin{aligned} |D'_4| &= C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_1 \cdot C_2 \\ &\quad + C_1 \cdot C_2 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_1 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_1 \cdot C_1 \cdot C_1 \\ &= 5 + 4 + 5 + 2 + 2 + 2 + 1 \\ &= 21. \end{aligned}$$

4.2 緩和

逆に、[条件] は実際に出現する可能性のあるパターンで排除しているものがある。本節では、[条件] の 1 番目を以下のように緩和して境界線が下辺あるいは右辺に対して引かれる場合を許容したときの分割図の数について考察する。このような分割図の集合を $D''_n(lc)$ とし、すべての lc に対する和集合を D''_n と表記する。

$1 \leq m \leq n$ である m に対して上側 B_1, \dots, B_m と下側 B_{m+1}, \dots, B_n に分割して B_i の条件を与える。

- $1 \leq i \leq m$ に対して Q_i は B_j ($0 \leq j < i$) または右辺のいずれかの上側にあり、 $m < i \leq n$ に対して Q_i は B_j ($i < j \leq n$) または下辺のいずれかの上にある。

このような m を上下の境界と呼ぶ。

まず、境界線が右辺に対して引かれることがない場合を考える。[条件] の 2 番目より上側と下側に分けて考えてよい。上側については、命題 2 より B_1, \dots, B_m の引き方は C_m 通りになる。下側については、 Q_{m+1}, \dots, Q_n の端点はすべて B_j ($i < j \leq n$) または下辺のいずれかの上にある。これはちょうど上下反転した場合に相当するため、 B_{m+1}, \dots, B_n の引き方は C_{n-m} 通りになる。したがって、分割図の数は $C_m \cdot C_{n-m}$ となる。

次に、境界線が右辺に対して引かれる場合も含めて考える．左辺と右辺を結ぶ境界線が p 本 ($1 \leq p \leq n$) あるとする．すなわち、 Q_{t_1}, \dots, Q_{t_p} が右辺上にあるとする．ただし、 $\{Q_{t_1}, \dots, Q_{t_p}\} \subseteq \{Q_1, \dots, Q_n\} \cdot B_{t_i-1}, B_{t_i}$ および左辺と右辺で囲まれた(開)領域を R_i とする ($2 \leq i \leq p$)．また、上辺 B_0, B_{t_1} および左辺と右辺で囲まれた(開)領域を R_1 とし、 B_p 、下辺および左辺と右辺で囲まれた(開)領域を R_{p+1} とする．これらの(開)領域 R_i ($1 \leq i \leq p+1$) を部分矩形と呼ぶ．部分矩形 R_i にそれぞれ境界線が h_i 本ひかれているとし、各部分矩形内での上下の境界をそれぞれ m_i とおく．

下辺に対して引かれる境界線は R_{p+1} にのみ存在することから、 $1 \leq j \leq p$ においては $m_j = h_j$ である．したがって R_j における境界線の引き方はそれぞれ C_{h_j} 通りになる． R_{p+1} における境界線の引き方は $C_{m_{p+1}} \cdot C_{h_{p+1}-m_{p+1}}$ となる．

したがって、

$$|D''_n(lc)| = C_{h_1} \cdot \dots \cdot C_{h_p} \cdot C_{m_{p+1}} \cdot C_{h_{p+1}-m_{p+1}}$$

である．

図9に境界線が下辺および右辺に対して引かれている例を示す．部分矩形は4つであり、点線は R_4 における上下の境界を表す．この例では分割図の数は $D''_8(lc) = C_0 \cdot C_0 \cdot C_3 \cdot C_2 \cdot C_2 = 20$ となる．

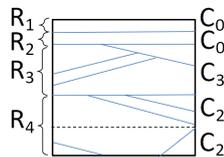


図9: 条件を緩和した分割図の例

5 おわりに

不整合面を含む地層の地質構造の推論問題は、各層を領域と見なして定性的に扱うことによって、一定の条件下における領域分割問題と捉えることができる．本稿では、この問題を定式化し、可能な構造の求め方やその個数について考察した．

本研究では、3節および4節で述べた条件を満たす分割図を描画するシステムを実装している．図10は $n = 4$, $lc = (\{P_1, P_2\}, \{P_3, P_4\})$ のときの全解の描画である．この中で赤色で表示しているのは広がった形状を含むものである．A,B,C,D,E は層を表し、柱状図として ABE, CDE が与えられたときの柱状図の間の可能な地層の構成を示している．

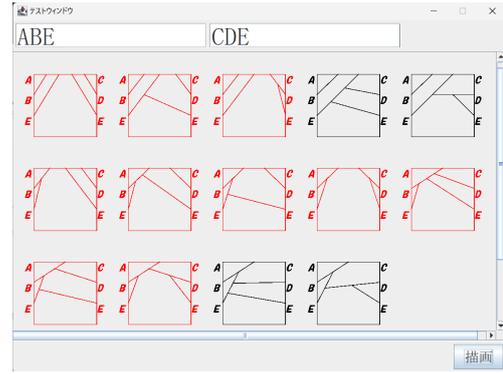


図10: 描画例:地層の構成

今後は証明支援系を使った証明をすることを考えている．また、地質構造の推論自体については褶曲や断層を含む構造への拡張も検討中である．

謝辞

本研究は JSPS 科研費補助金 JP24K15096 の助成を受けたものである．

参考文献

- [1] Chen, J. et al.: A survey of qualitative spatial representations. *Knowl. Eng. Rev.*, **30**, 106–136 (2013)
- [2] Kano, K. and Murata, A.: *Structural Geology*. Asakura Publishing Co., Ltd. (1998) (In Japanese).
- [3] Roman, S.: *An Introduction to Catalan Numbers*. Springer-Verlag (2015).
- [4] Sioutis, M., Wolter, D.: Qualitative spatial and temporal reasoning: current status and future challenges. *IJCAI2021*, pp. 4594–4601 (2021).
- [5] Shiono, K. (2019). Development of geology-oriented logical system (geo-logics): Search for mathematical bases of geological data processing. *Geoinformatics*, 30(4):161–179. (In Japanese).
- [6] Taniuchi, Y. and Takahashi, K.: Qualitative spatial representation and reasoning about fold strata. *ICAART2023*, pp. 211–220 (2023).
- [7] https://mak-kawa.sakura.ne.jp/My_HokGeo1100select/contents/971_kenufuchi.html [2024/11/20 access].