

接点を持つ閉曲線の記号表現の提案とその性質について

A proposal for a symbolic representation for a closed curve with tangent points and its characteristics

東末 桃* 高橋 和子
Momo Tosue Kauko Takahashi

関西学院大学大学院 理工学研究科
School of Science & Technology, Kwansei Gakuin University

Abstract: We describe the characteristics of a symbolic representation for closed curves with tangent points. A method for qualitatively representing shapes of simple closed curves as a sequence of curvature extrema has been proposed. We extend this method so that closed curves with tangent points can be handled, and discuss the relationship between the figure on a two-dimensional plane and this symbolic expression. We discuss the properties the symbolic expression should satisfy when a figure can be drawn without an intersection on a two-dimensional plane.

1 はじめに

形状変化は地形学における地形の変動や医学における免疫細胞のアメーバ運動等、さまざまな分野で見られる。これを計算機で扱うには数値データを用いたシミュレーションをするのが一般的だが、数値を使わずに定性的に形状を表現することによって、計算機の負荷を軽減するだけでなく、変化の特徴を人間が直観的にとらえることができる [Cohn, 1995, Galton and Meathrel, 1999]. 著者らは、発生生物学において、球形の受精卵の形が変化して器官や臓器の形成される仕組みを、二次元平面上に投影して記号的に表現し、その上で推論する手法について考察している [Tosue and Takahashi, 2019]. この場合、対象となる図形は、自己交差を持たない平面上の閉曲線で、それが接点をもつ場合もある。また、この過程で重要なのは曲線上の接点とへこみの有無であるため、位相幾何学とは異なる新たな仕組みを開拓する必要がある。

単純閉曲線の形状を曲率の変化によって定性的に表現する手法に Leyton が提案した Process-Grammar がある [Leyton, 1988]. この手法は、一つの単純閉曲線について、その輪郭を反時計回りにたどったときの曲率を四種類の記号に分類し、それらの記号列として形状を定性的に表現するものである。Leyton は、へこみのない円から有限個の規則によって生成される記号列の集合 S と二次元平面上の単純閉曲線の集合が一致することを証明した。しかし、 S に属する記号列に接点を

付与すると、その記号列に対応する、接点をもつ閉曲線は二次元平面上に必ずしも存在しない。

本研究では、まず、Leyton による形状の記述方法を拡張し、接点を持つような閉曲線を表現する記号列の記述方法を提案する。次に、二次元平面上で、接点をもつ閉曲線を交差することなく描けるときに、対応する記号列が満たす条件について考察する。

本発表の構成は以下の通りである。第2章では接点をもつ閉曲線の記号表現について述べる。第3章では二次元平面上の図と記号列の関係について述べる。第4章では記述言語に関する条件について考察する。第5章では結論と今後の課題について述べる。

2 閉曲線の記号表現

2.1 単純閉曲線

Leyton は、一つの閉曲線についてその輪郭を反時計回りにたどり、その際に変化する曲率を正の極大値と極小値、負の極大値と極小値の計四種類の記号 (M^+ , m^+ , M^- , m^-) に分類した。 M^+ と M^- は内側から、 m^+ と m^- は外側から力が加わっていると、これらの記号を閉曲線の対応する箇所配置し、それを反時計回りに曲線をたどった順に並べることで形状を定性的に表現した (図1)。ただし開始点はどこでもよい。そのようにしてできた記号列を、形状を表現する記述式とする。例えば図2は $M^+m^+M^+m^-M^+m^+M^+m^-$ で表される。

*連絡先：関西学院大学大学院 理工学研究科 高橋和子研究室
〒669-1337 兵庫県三田市学園2丁目1番地
E-mail: eyi98098@kwansei.ac.jp

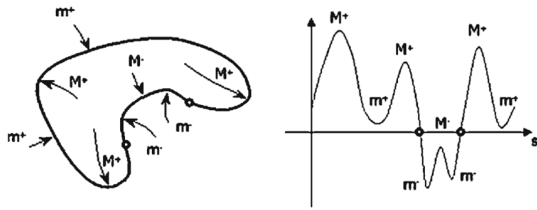


図 1: 閉曲線と曲率のグラフ

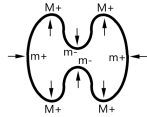


図 2: 記号列 $M^+m^+M^+m^-M^+m^+M^+m^-$ に対応する図

2.2 接点をもつ閉曲線

記号 (M^+ , m^+ , M^- , m^-) に対応する図の曲線部分をセグメントとする. n 個のセグメントが一点で接しているとき, 各々の対応する記号を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると, この閉曲線を表す記号列の中に出現する $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$ の上にすべて同種類のドット記号を付加する.

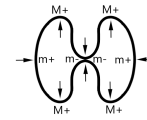
ドットの種類は接点の数だけあるが, 以後は接点の数を一つまたは二つとし, 単一ドットと二つ並べたドットで表現する. また, 一つの接点を形成するセグメントの個数を二個とする. 本研究では接点を形成する二つのセグメントのうち少なくとも一つは急なカーブを表す M^+ または m^- であり, かつ二つのセグメントの矢印が向き合っている場合のみを考える. したがって接点は

- m^- と m^-
- m^- と m^+
- M^+ と M^+
- M^+ と M^-

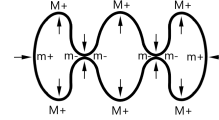
これらのいずれかによって作られるものとする.

図 3(a) の図は二つの m^- が接している. このとき, 記号列中の二つの m^- の上にドットをつけて表現する. つまり, 図に接点がある場合, 記号列中にはドットのペアが一つ存在することになる.

図 3(b) は図中に接点が二つある場合である. このとき, 記号列中にドットのペアを二つ作ることで表現する. このペアをドットの個数で区別することにする (\dot{m}^- はもう一つの m^- と接しており \ddot{m}^- とは接していない).



(a) 記号列 $M^+m^+M^+\dot{m}^-M^+m^+M^+\dot{m}^-$ に対応する図



(b) 記号列 $M^+m^+M^+\dot{m}^-M^+\ddot{m}^-M^+m^+M^+\dot{m}^-M^+\ddot{m}^-$ に対応する図

図 3: ドットによる接点の表現の例

3 二次元平面上の図と記号列の関係

3.1 接点をもたない場合

図 2 のような接点をもたない閉曲線を表す記号列の満たす条件は以下である.

- 大文字と小文字が交互 (ただし m^+ と M^- は隣り合わない)
- 長さ 4 以上

対象の図形は滑らかな曲線による閉曲線であり, このとき対応する曲率のグラフも常に連続である. また卵型線の頂点の個数は最低四つである. したがって上記の条件が必要である.

3.2 接点をもつ閉曲線が描ける条件の求め方

3.1 で述べた制約条件を満たす記号列について列中の二つの記号 (2.2 で述べた四種類の記号のペアのいずれか) にドットをつけると, 交差することなく図が描けない記号列が存在する. 例えば記号列 $M^+m^+M^+m^+$ からは交差することなく図を描くことはできるが, 記号列 $\dot{M}^+m^+\dot{M}^+m^+$ からは交差することなく図を描くことはできない. 接点をもつ閉曲線を表す記号列については新たな条件が必要となる. ここでは, 接点の一つと二つのときのすべての可能な図を分類し, それぞれの図の接点の種類によって対応する記号列を考える. そして, それぞれの記号列の満たす条件を求める.

3.3 図の色塗り方法

記号列は以下のように分類することができる. 図 2 のように記号列中にドットのペアがない場合, 記号列は単純閉曲線を表しており, 平面を二つに分割する. こ

れを隣り合う面の色が異なるように二色 (緑/白) で塗るとき、塗り方は

- 閉曲線の内側が緑、外側が白
- 閉曲線の内側が白、外側が緑

の二パターンである。本稿では“緑”の部分はグレーで図示する。

3.4 記号列との関係

記号列から得られる平面図について、以下のように塗り方を決める。

- 記号列に対応する曲率の総和が正のとき、その記号列によって作られる閉曲線の内側を緑、外側を白にする
- 記号列に対応する曲率の総和が負のとき、その記号列によって作られる閉曲線の内側を緑、外側を白にする

例えば $M^+m^+M^+m^+$ は図 4 の左の図のように曲率が変化している。曲率は常に正であるので、その総和は必ず正になる。したがって、閉曲線と記号を対応付けると図 4 の中央の図のようになり、上記のルールに従って色を塗ると図 4 の右の図のようになる。

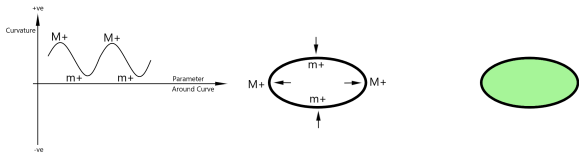


図 4: 記号列 $M^+m^+M^+m^+$ の曲率のグラフと対応する図

$M^-m^-M^-m^-$ は図 5 の左の図のように曲率が変化している。曲率は常に負であるので、その総和は必ず負になる。したがって、閉曲線と記号を対応付けると図 5 の中央の図のようになり、上記のルールに従って色を塗ると図 5 の右の図のようになる。

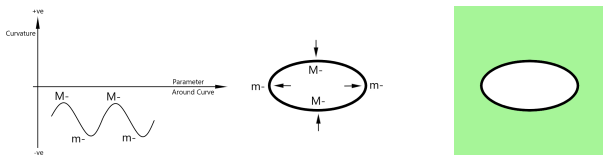


図 5: 記号列 $M^-m^-M^-m^-$ の曲率のグラフと対応する図

$M^+m^-M^+m^-$ は、曲率の値によって総和の符号が変わる。図 6 の上段のように + の曲率が大きく、総和

が正の場合と、下段のように - の曲率が大きく、総和が負の場合のどちらも考えられる。このように、記号列からだけでは色の塗り方が一意に決まらない場合がある。

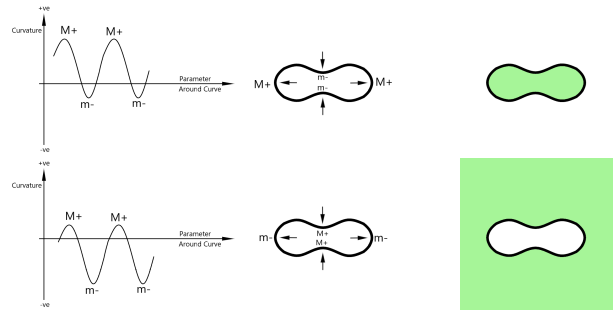


図 6: 記号列 $M^+m^-M^+m^-$ の曲率のグラフとそれぞれに対応する図

接点をもつ図の場合も同様に色を塗る (図 7)。平面図中の一つの閉じた面の色が決定すればすべての面の色が決定する。

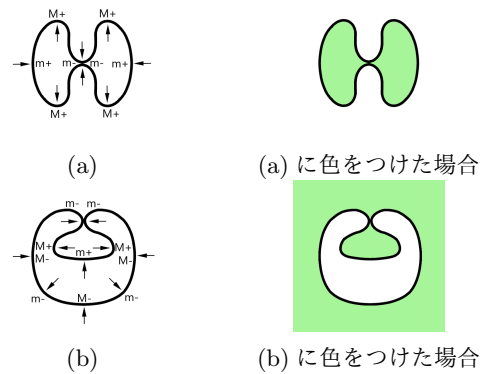


図 7: 接点をもつ図の場合

図 3(a) のように記号列中にドットのペアが一つある場合は、記号列は一点で接している二つの領域によって平面を三つに分割するような図として考える。このとき片方の領域がもう片方の内か外かとそれぞれについて二パターンの色の塗り方があるので、合計四つの塗り方のパターンが考えられる (図 8)。図 7(a) は図 8(a)、図 7(b) は図 8(c) とそれぞれ対応する。

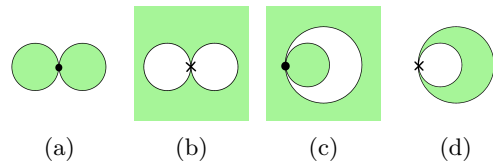


図 8: 接点の一つの場合の色によるクラス分け

また、記号列中のドットのペアは (m^-, m^-) , (m^-, m^+) ,

(M^+, M^+) , (M^+, M^-) の四種類である。このうち、 (m^-, m^-) と (m^-, m^+) は図 8 中の ● 印, (M^+, M^+) と (M^+, M^-) は図 8 中の × 印にそれぞれ対応する。

記号列中にドットのペアが二つあるとき、そのペアが独立している場合と混在する場合に分けられる。図 3(b) のように記号列中にドットのペアが二つありそれらが独立しているとき、記号列は“領域が三つあり、そのうちの二つが残りの一つと接しており(ただし二つの接点は離れている)平面を四つに分割するような図”と対応する。そしてそれは、全部で十パターンである(図 9)。

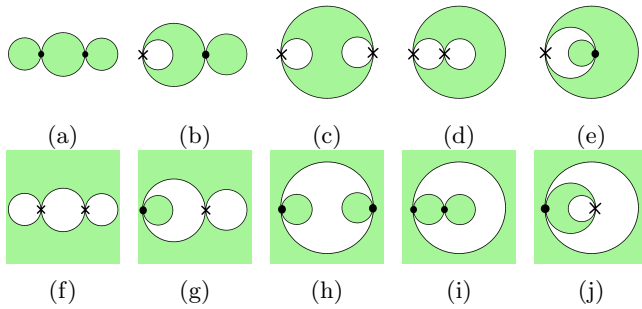


図 9: 接点が二つの場合の色によるクラス分け

記号列中にドットのペアが二つありそれらが混在する場合は、上記のような領域として考えることができないため、別途考える。

4 記号列の条件

4.1 ドットのペアが一つの場合

ドットのペアが一つある記号列についての、図が交差することなく描けるための条件について考える。

性質

ドットのペアを一つもつ記号列の中のドット記号からもう一つのドット記号までの部分列がすべて + の記号で構成されている場合、その部分列によって作られる領域の内側は必ず緑である(図 10)。

しかし、部分列中に + と - の記号がどちらも含まれている場合は、曲率の大きさによって領域内の内側の色が緑の場合と白の場合の両方考えられる(図 11)。

したがって

性質 1. ドットのペアを一つもつ記号列の部分列 $\dot{d}s\dot{d}'$ について(ただし \dot{d}, \dot{d}' はドットのペア, s はそれらの間の記号列とする), 以下の性質が成り立つ。

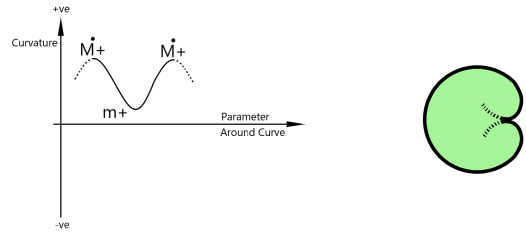


図 10: ドットからもう一つのドットまでがすべて + の記号の場合

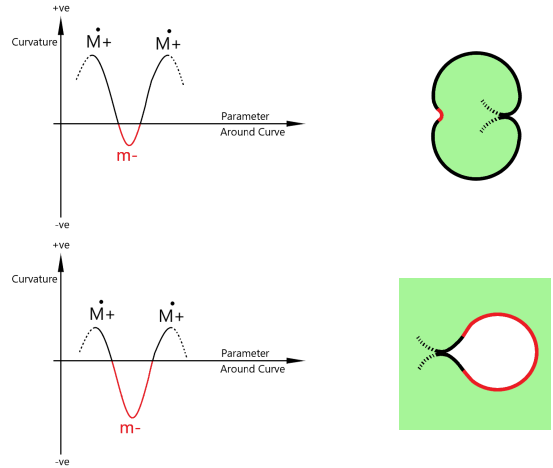


図 11: ドットからもう一つのドットまでに + と - の記号がどちらもある場合

- $\dot{d}s\dot{d}'$ が + の記号のみで構成されているとき, $\dot{d}s\dot{d}'$ によって作られる領域の内側は必ず緑である
- $\dot{d}s\dot{d}'$ が - の記号のみで構成されているとき, $\dot{d}s\dot{d}'$ によって作られる領域の内側は必ず白である
- 上記以外の場合, $\dot{d}s\dot{d}'$ によって作られる領域の内側は緑にも白にもなりうる

記号列の条件

(1) 記号列中のドットのペアが (M^+, M^+) または (M^+, M^-) の場合

考えられる領域のパターンは図 8 の (b) と (d) である。ドットの間の記号列を s_1, s_2 とすると、接点と s_1 で作られる領域と接点と s_2 で作られる領域のうち少なくともどちらか一方の内側が白でなければならない。

性質 1 より記号列 $\dot{M}^+s_1\dot{M}^+s_2$ は, s_1 または s_2 の少なくともどちらか一方に - の記号がなければならない。記号列 $\dot{M}^+s_1\dot{M}^-s_2$ についてはドット記号に + と - の記号がどちらも含まれているため, s_1, s_2 に関する条件はない。

(2) 記号列中のドットのペアが (m^-, m^-) または (m^-, m^+) の場合

考えられる領域のパターンは図8の(a)と(c)である。色塗りの条件が(1)とちょうど逆になるので、(1)と同様に考えると条件がわかる。

以上より、ドットのペアが一つの場合の記号列の、図が交差することなく描けた場合に満たすべき条件は以下である。

- 記号列 $\dot{M}^+s_1\dot{M}^+s_2$ は、 s_1 または s_2 の少なくともどちらか一方に $-$ の記号がなければならない
- 記号列 $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-s_2$ は、 s_1 または s_2 の少なくともどちらか一方に $+$ の記号がなければならない

4.2 ドットのペアが二つの場合

4.2.1 ペアが独立しているとき

記号列中にドットのペアが二つあり、それらが独立している場合は、ペアの間の記号列(例:図12の s_1, s_2)とペアをつないでいる記号列(例:図12の t_1, t_2)がある。

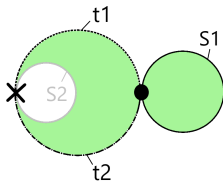


図12: 記号列 $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-t_1\ddot{M}^+s_2\ddot{M}^+t_2$ の例

ペアの間の記号列と対応する領域の色の関係については接点があるときと同様である。ペアをつないでいる記号列と対応する領域の色について考える。

性質

記号列 $\dot{d}_1s_1\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2s_2\ddot{d}_2't_2$ について、二つの部分列 $\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2$ と $\ddot{d}_2't_2\dot{d}_1$ がどちらも $+$ の記号のみで構成されている場合、それらによって作られる領域の内側は必ず緑である。

しかし、二つの部分列中に $+$ と $-$ の記号がどちらも含まれている場合は、曲率の大きさによって領域内の内側の色が緑の場合と白の場合の両方考えられる。

したがって

性質 2. ドットのペアを二つもち、かつそれらが独立している記号列 $\dot{d}_1s_1\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2s_2\ddot{d}_2't_2$ の二つの部分列 $\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2$ と $\ddot{d}_2't_2\dot{d}_1$ について、(ただし \dot{d}_1 と \dot{d}_1' , \ddot{d}_2 と \ddot{d}_2' はドットのペアであり、 s_1, s_2, t_1, t_2 はそれらの間の記号列である) 以下の性質が成り立つ。

- $\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2$ と $\ddot{d}_2't_2\dot{d}_1$ が $+$ の記号のみで構成されているとき、それらによって作られる領域の内側は必ず緑である
- $\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2$ と $\ddot{d}_2't_2\dot{d}_1$ が $-$ の記号のみで構成されているとき、それらによって作られる領域の内側は必ず白である
- 上記以外の場合、 $\dot{d}_1't_1\ddot{d}_2$ と $\ddot{d}_2't_2\dot{d}_1$ によって作られる領域の内側は緑にも白にもなりうる

記号列の条件

(1) 記号列 $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-t_1\ddot{m}^-s_2\ddot{m}^-t_2$ の場合

考えられる領域のパターンは図9の(a),(h),(i)の三パターンである。つまり、

- $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-$ の領域が緑、 $\dot{m}^-t_1\ddot{m}^-$ と $\ddot{m}^-t_2\dot{m}^-$ による領域が緑、 $\ddot{m}^-s_2\dot{m}^-$ の領域が緑
- $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-$ の領域が緑、 $\dot{m}^-t_1\ddot{m}^-$ と $\ddot{m}^-t_2\dot{m}^-$ による領域が白、 $\ddot{m}^-s_2\dot{m}^-$ の領域が緑
- $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-$ の領域が緑、 $\dot{m}^-t_1\ddot{m}^-$ と $\ddot{m}^-t_2\dot{m}^-$ による領域が緑、 $\ddot{m}^-s_2\dot{m}^-$ の領域が白

のどれかであればよい。よって性質1,2より s_1, s_2, t のうち少なくとも二つは $+$ の記号がなければならない。ただし t は t_1 または t_2 のことを指す。 (m^-, m^+) のペアが含まれる場合は間の s_1, s_2, t に関する条件はない。

(2) 記号列 $\dot{M}^+s_1\dot{M}^+t_1\ddot{M}^+s_2\ddot{M}^+t_2$ の場合

考えられる領域のパターンは図9の(c),(d),(f)の三パターンである。よって性質1,2より s_1, s_2, t のうち少なくとも二つは $-$ の記号がなければならない。 (M^+, M^-) のペアが含まれる場合は間の s_1, s_2, t に関する条件はない。

(3) 記号列 $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-t_1\ddot{M}^+s_2\ddot{M}^+t_2$ の場合

考えられる領域のパターンは図9の(b),(e),(g),(j)の四パターンである。よって性質1,2より、記号列が満たすべき条件は、 s_1 に $+$ の記号がある、または s_2 に $-$ の記号がある、である。 (M^+, M^-) または (m^-, m^+) のペアが含まれる場合は間の記号列に関する条件はない。

以上より、ドットのペアを二つもち、かつそれらが独立している記号列の、図が交差することなく描けるための条件は以下である。

- 記号列 $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-t_1\ddot{m}^-s_2\ddot{m}^-t_2$ は、 s_1 または s_2 または t のうち少なくとも二つは $+$ の記号がなければならない
- 記号列 $\dot{M}^+s_1\dot{M}^+t_1\ddot{M}^+s_2\ddot{M}^+t_2$ は、 s_1 または s_2 または t のうち少なくとも二つは $-$ の記号がなければならない
- 記号列 $\dot{m}^-s_1\dot{m}^-t_1\ddot{M}^+s_2\ddot{M}^+t_2$ は、 s_1 に $+$ の記号がある、または s_2 に $-$ の記号がある、の少な

くともどちらか一方を満たしていなければならない

4.2.2 ペアが混在しているとき

ドットのペアを二つもち、かつそれらが混在している記号列 $\dot{d}_1 s_1 \ddot{d}_2 t_1 \dot{d}_1' s_2 \ddot{d}_2' t_2$ については、(ただし \dot{d}_1 と \dot{d}_1' 、 \ddot{d}_2 と \ddot{d}_2' はドットのペアであり、 s_1, s_2, t_1, t_2 はそれらの間の記号列である) 二つのドットのペアのうち一つが (M^+, M^+) または (M^+, M^-) 、もう一つが (m^-, m^-) または (m^-, m^+) である場合のみ交差することなく図を描ける。二つのドットのペアが両方とも大文字同士のペアである場合または両方とも小文字同士のペアである場合は、 s_1, s_2, t_1, t_2 がどんな記号列であっても交差することなく図を描くことができない (図 13)。



図 13: 記号列 $M^+ \dot{m}^- M^+ \ddot{m}^- M^+ \dot{m}^- M^+ \ddot{m}^-$ の場合
左図のようにドットのペアが配置されている場合、それぞれを接すると右図のように交差ができてしまう

4.2.3 まとめ

以上の考察をまとめる。 e_1 と e_1' 、 e_2 と e_2' を小文字のドットのペア、 E_1 と E_1' 、 E_2 と E_2' を大文字のドットのペアとすると、ドットのペアを二つもち記号列は以下の六つに分類される。

$$\begin{cases} \dot{e}_1 s_1 \dot{e}_1' t_1 \ddot{e}_2 s_2 \ddot{e}_2' t_2 & (1) \\ \dot{E}_1 s_1 \dot{E}_1' t_1 \ddot{E}_2 s_2 \ddot{E}_2' t_2 & (2) \\ \dot{e}_1 s_1 \dot{e}_1' t_1 \ddot{E}_1 s_2 \ddot{E}_1' t_2 & (3) \\ \dot{e}_1 s_1 \ddot{e}_2 t_1 \dot{e}_1' s_2 \ddot{e}_2' t_2 & (4) \\ \dot{E}_1 s_1 \ddot{E}_2 t_1 \dot{E}_1' s_2 \ddot{E}_2' t_2 & (5) \\ \dot{e}_1 s_1 \ddot{E}_1 t_1 \dot{e}_1' s_2 \ddot{E}_1' t_2 & (6) \end{cases}$$

4.2.1, 4.2.2 より、ドットのペアを二つもち記号列の、交差なしの図が描けるための条件は以下である。ただし、 t は t_1 または t_2 を指す。また、+ の記号を一つ以上含むような記号列を r^+ 、- の記号を一つ以上含むような記号列を r^- とする。

(1) のとき

- e_1, e_1', e_2, e_2' がすべて m^- のとき、 s_1, s_2, t のうち少なくとも二つは r^+

- それ以外の場合、必ず描ける

(2) のとき

- E_1, E_1', E_2, E_2' がすべて M^+ のとき、 s_1, s_2, t のうち少なくとも二つは r^-
- それ以外の場合、必ず描ける

(3) のとき

- e_1, e_1' がどちらも m^- 、 E_1, E_1' がどちらも M^+ のとき、 s_1 が r^- または s_2 が r^-
- それ以外の場合、必ず描ける

(4) のとき 交差せずに図は描けない

(5) のとき 交差せずに図は描けない

(6) のとき 必ず描ける

5 おわりに

Leyton による形状の記述方法を拡張し、接点をもつ閉曲線を表現できるようにした。また、二次元平面上で、一つまたは二つの接点をもつ閉曲線を交差することなく描けるときに、対応する記号列が満たす条件を示した。

今後は二つのドットのペアが混在している記号列の性質についての形式的な証明を行う。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP18K11453 の助成を受けたものである。

参考文献

- [Cohn, 1995] Cohn, A. G. (1995), A hierarchical representation of qualitative shape based on connection and convexity, *Spatial Information Theory. Cognitive and Computational Foundations of Geographic Information Science, International Conference COSIT'99*, pages 311–326.
- [Galton and Meathrel, 1999] Galton, A. and Meathrel, R. (1999), Qualitative outline theory, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1061–1066.
- [Leyton, 1988] Leyton, M. (1988), A process-grammar for shape, *Artificial Intelligence*, 34:213–247.
- [Tosue and Takahashi, 2019] Tosue, M. and Takahashi, K. (2019), Towards a qualitative reasoning on shape change and object division, *Spatial Information Theory. 14th International Conference, COSIT 2019*, pages 7:1–7:15.