社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

Finding a Route without an Intersection

東末 桃† 高橋 和子††

† 関西学院大学大学院理工学研究科 〒669–1337 兵庫県三田市学園 2–1
†† 関西学院大学工学部 〒669–1337 兵庫県三田市学園 2–1
E-mail: †tm-mm.1214@docomo.ne.jp, ††ktaka@kwansei.ac.jp

あらまし 本発表では，2 次元平面上の複数の曲線有限部分が端点以外の 1 点で外接し，この外接点がすべての曲線で共有されるとき，これらの曲線の端点を結ぶことで交差することなく 1 本の閉曲線を描くという問題に取り組む．このような閉曲線が描けるために端点をつなぐ順番が満たすべき条件を示す．証明では，補助的に滑らかな単純円周上に偶数個の点を配置し，まずそれらのペアを結ぶと円の内部で交差なくエッジが描けることを示し，その結果を使って外部でも交差なくペア同士を結ぶ曲線が描けることを示す．

キーワード 平面分割，計算幾何学，定性空間推論

Finding a Route without an Intersection

Momo TOSUE† and Kazuko TAKAHASHI††

† Graduate School of Engineering, Kwansei Gakuin University 2–1 Gakuen, Sanda, Hyougo, 105–0123 Japan
†† School of Engineering, Kwansei Gakuin University 2–1 Gakuen, Sanda, Hyougo, 105–0123 Japan
E-mail: †tm-mm.1214@docomo.ne.jp, ††ktaka@kwansei.ac.jp

Abstract We address the problem: when a multiple finite curved line segments share one tangent point other than their end points on a two-dimensional plane, if we connect their end points in a given order, whether we can draw a closed curve without an intersection. We show the condition that an order of connecting the line segments should satisfy. On proving this, we considering an even number of points on a simple circle; we show that we can draw egdes without crossing with each other by connecting pairs of the points inside of the circle; and that from this result, we can also draw them outside of the circle.

Key words plane division, computer geometry, qualitative spatial reasoning

1. はじめに(注1)

定性空間推論は図形やオブジェクト画像から注目すべき必要な情報のみを抽出することで数値データではなく定性的に記号表現しその表現上で推論をする手法である [1], [2]．この手法は人間の認知や理解と合致した表現や推論ができるため，人工知能の一分野から出発した後様々な学際的研究を産み出した．空間オブジェクトの性質としては，オブジェクト同士の包含関係，相対的位置関係，オブジェクトの形状など様々なものがある．形状に関する定式化はいくつか提案されているが，多くは 2 次元上の図形を対象とし，その境界線をセグメントに分割してそれぞれの特徴を列とする手法である [3]〜[6]．

Tosue らは Leyton の手法 [4], [5] を拡張して発生生物学で見られる器官形成過程に応用した [7]．器官形成の過程では肺胞と呼ばれる球体から始まり，これがへこんだり分裂したりして徐々に臓器の形が形成されていく．肺胞の表面は細胞シートで覆われており，細胞シートが自己交差することはない．たとえば図 1. は肺胞をオブジェクトとしてその 2 次元平面への射影を示すものであるが，オブジェクトは単純な凸円から図 1.(a) のように変化することはあっても図 1.(b) のように変化することはない．後者では断面図の曲線は自己交差しておりオブジェクトの内部と外部を分割しない．

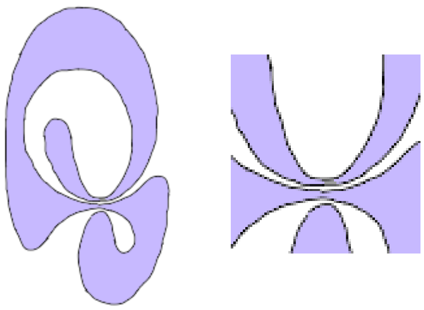
器官形成過程で見られる断面図を記号表現した場合，その表現上で初期状態から到達可能な図形かどうかを判定できるだろうか？言い換えると，与えられた記号表現に対応する自己交差のない（ただし外接点をもつ）単純閉曲線が描けるかどうか判定する方法があるだろうか？複数の線分が 1 つの接点を形成するような交差のない閉曲線を考えると（図 2(a)）接点の近傍は

(注1)：第一著者の現所属：株式会社トヨコー

(a) 可能なもの　　(b) 不可能なもの

図 1　細胞シートの形状の存在の有無.

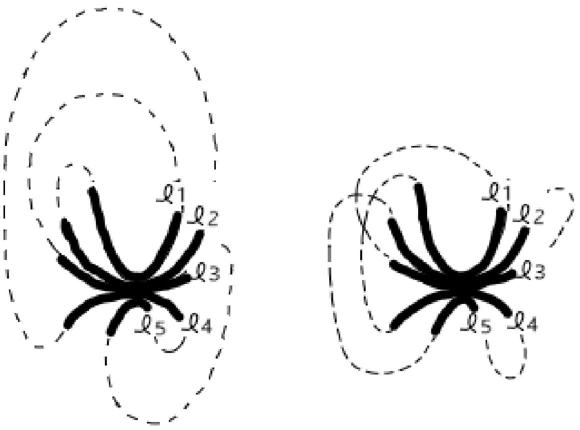
図 2(b) のようになる．本稿では，ここから派生した問題として，図 2(b) が与えられたときに線分の端点を結ぶことで平面上に閉曲線を描くための端点を結ぶ順番について考察する．この問題は，平面上に交差なく閉曲線を描くアルゴリズムを求める問題に帰着し，計算幾何学，グラフの平面埋め込み問題，地図塗り分け問題だけでなく，結び目理論やホモトピー理論などともかかわるものである．



(a) オブジェクトの形状　　(b) 共有接点の近傍

図 2　オブジェクトの形状と共有接点の近傍.

たとえば図 3 に示す 5 本の線分 $l_1, \ldots, l_5$ を考えると，図 3(a) の順番では交差なく閉曲線が描けるが，図 3(b) の順番では無理である．



(a) 交差なし　　(b) 交差あり

図 3　線分をつなぐ順番.

本研究ではこの問題を定式化し，線分を結ぶ順番が満たす条件を示す．証明では，補助的に滑らかな単純円周上に偶数個の点を配置し，まずそれらのペアを結ぶと円の内部で交差なくエッジが描けることを示し，その結果を使って外部でも交差なくペア同士を結ぶ曲線が描けることを示す.

本稿は以下のように構成される．第 2. 章では問題の定式化を行い．第 3. 章では, 順番の満たすべき条件を示す．第 4. 章では, 補助円の内部で交差なくエッジが描けることを示す．第 5. 章では, この結果を使って補助円の外部で交差なくエッジが描けることを示す．第 6. 章では, 条件の十分性について議論する．最後に第 7. 章で，結論を述べる．

2. 準　　備

まず，問題を以下のように定式化する．

> 2 次元平面上の複数の曲線有限部分が端点以外の 1 点で外接し，この外接点がすべての曲線で共有されるとき，これらの曲線の端点を結ぶことで交差することなく 1 本の閉曲線を描くことができるつなぎ方を求める．

まず，補助円として平面上の滑らかで微分可能な円を考える．円周上の任意の点を原点 O と定め, 円周上に O から時計回りに互いに異なる $2n$ 個の O とは異なる点 $A_1, \ldots, A_n, A'_n, \ldots, A'_1$ をとる．この点の集合を $Points$ と表記する．$Points$ を 2 分割し，$S_R = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $S_L = \{A'_n, A'_{n-1}, \ldots, A'_1\}$ とおく．

［定義 1］ (同一側, 反対側) 円周上の任意の異なる 2 点 $A, B \in Points$ に対して，$A, B \in S_R$ または $A, B \in S_L$ のとき，A, B は **同一側にある** といい，$A \in S_R$ かつ $B \in S_L$ のとき，A, B は **反対側にある** という．

円周上での O からの距離によって順序関係 $\prec$ を定めると，$A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_n$, $A'_1 \prec A'_2 \prec \ldots \prec A'_n$ となる．

［定義 2］ (相対点) $p_i, p_j \in Points$ に対して $i = 2n + 1 - j$ のとき，p_j を p_i の**相対点**といい，$compl(p_i)$ と表記する．

［命題 1］ $p_1, p_2 \in Points$ に対して $p_1 \prec p_2$ ならば $compl(p_1) \prec compl(p_2)$ である．

$\pi = \{c_1, \ldots, c_n\}$ を $\{1, \ldots, n\}$ の並び替えとし，この解釈を与えることで円周上の点を結ぶ順番とする．

$c_i \in \pi$ の円周上における解釈を $\sigma(c_i)$ とする．エッジの端点の番号の差が奇数か偶数かによって同一側の点を結ぶか反対側の点を結ぶかを決める．

$Points = \{p_1, p_2, \ldots, p_{2n}\}$ を円周上の点で時計回りにこの順で出現するとする．すなわち，$p_1 \prec p_2 \prec \ldots \prec p_n$, $p_{2n} \prec p_{2n-1} \prec \ldots \prec p_n$. $p_1, \ldots, p_n \in S_R$, $p_{n+1}, \ldots, p_{2n} \in S_L$ が成り立つ．

π が与えられたとき，$i \in \pi$ に対して，$f(i) = p_i$, $g(i) = compl(p_i)$ と定める．

$i = 1$ のとき

$x_1 = f(c_1)$.

$$y_1 = \begin{cases} f(c_2) & (c_2 - c_1 \text{が奇数}) \\ g(c_2) & (c_2 - c_1 \text{が偶数}) \end{cases}$$

$i > 1$ のとき（ただし $c_{n+1} = c_1$ とする.）

$x_i = compl(y_{i-1})$

$$y_i = \begin{cases} f(c_{i+1}) & (c_{i+1}-c_i\text{が奇数かつ } x_i \in S_R) \text{ または} \\ & (c_{i+1}-c_i\text{が偶数かつ } x_i \in S_L) \\ & \\ g(c_{i+1}) & (c_{i+1}-c_i\text{が偶数かつ } x_i \in S_R) \text{ または} \\ & (c_{i+1}-c_i\text{が奇数かつ } x_i \in S_L) \\ & \end{cases}$$

この結果得られる円周上の点列を $F(\pi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とおく．$\sigma_1(c_i) = x_i, \sigma_2(c_i) = y_i$ とする．また，$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ をそれぞれ円の内部で結ぶことによって得られる図形を $\mathcal{F}(\pi)$ とする．

［例 1］ $\pi = (1, 2, 3, 5, 4)$ のとき，$F(\pi)$ を定める．

$x_1 = f(1) = p_1$.

$y_1 = f(2) = p_2$.

$x_2 = compl(p_2) = p_9$.

$y_2 = g(3) = p_8$.

$x_3 = compl(p_3) = p_3$.

$y_3 = g(5) = p_6$.

$x_4 = compl(p_6) = p_5$.

$y_4 = f(4) = p_4$.

$x_5 = compl(p_4) = p_7$.

$y_5 = g(1) = p_{10}$.

このように円の内部で線分をひいて得られる図 $\mathcal{F}(\pi)$ を図 4 に示す．$F(\pi) = \{p_1, p_9, p_3, p_5, p_7\}$ となる．

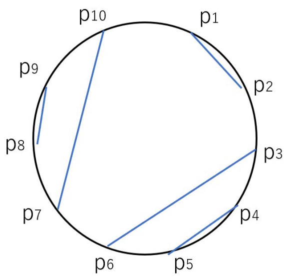


図 4　$\mathcal{F}((1, 2, 3, 5, 4))$.

$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ の順に通ると $Points$ に含まれるすべての点をちょうど 1 回ずつ通り，また，y_n, x_1 を加えることで全体でつながった列を形成できる．

［定義 3］ (訪問点/未訪問点) π にしたがって i 本目のエッジを引く場合，1 から $i-1$ 番目までのエッジの端点になっている点を**訪問点**，それ以外を**未訪問点**とよぶ．

［定義 4］ (段) $x_i \in Points$ とする．$x_i, compl(x_i)$ をそれぞれ**円の** i **段目**とよび，$i > j$ ならば i 段目を j の**上段**，j 段目を i の**下段**であるという．

3. 端点を結ぶ順番の満たす条件

ここでは，補助的に滑らかな単純円を考え，この円周上に $2n$ 個の異なる点を配置する．この点が曲線の端点に相当する．この $2n$ 個の点を結ぶ順番を与え，それが満たすべき条件を示す．

まず，すべての頂点を 1 回ずつ使って n 個のペアを作ってエッジとして円の内部で結ぶと，円の内部で交差なくエッジが描けることを示し，次にその結果を使って外部でも交差なく対同士を結ぶ曲線が描けることを示す．

[条件 1] $\pi = (c_1, \dots, c_n)$ において，$c_1 < c_2 < \dots < c_l$, $c_n < c_{n-1} < \dots < c_{l+1} < c_l$ を満たす l $(1 \le l \le n)$ が存在する．

$\pi = (c_1, \dots, c_n)$ に対して $\pi^k = (c_k, c_{k+1}, \dots, c_n, c_1, \dots, c_{k-1})$ (ただし $k = 1, \dots, n$)，$\pi^{-1} = (c_n, \dots, c_1)$ とおく．π は並び替えなので，π が条件 1 を満たすならば π^k $(k = 1, \dots, n)$ および π^{-1} も条件 1 を満たす．

［定理 1］ 並び替え $\pi = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ が条件 1 を満たすならば求める閉曲線を描くことができる．

まず，π が条件 1 を満たすならば $\mathcal{F}(\pi)$ における n 本のエッジは互いに交差しないことをいう．次に，π が条件 1 を満たすならばこのときの n 個のペアそれぞれに対して円の外部で曲線でつなぐことによって交差のない 1 つの単純閉曲線を作成することができることを示す．

4. 円の内部で交差のないことの証明

円の内部で交差しないような n 個のエッジの組が存在するのは明らかで，たとえば上から順番に左右と交互に 1 段ずつ下りながら円を輪切りにしながら下まで辿ることによって達成できる．また，与えられた n 個の組が条件を満たすかどうか判定する線形時間のアルゴリズムも存在する．しかし，ここでは曲線のセグメントの端点を結ぶ問題から派生しているため，あくまでも曲線をつなぐ順番の満たす条件を考える必要がある．

［補題 1］ π が条件 1 を満たすとき，$\mathcal{F}(\pi)$ における n 本のエッジは互いに交差しない．

証明) $\pi = (c_1, \dots, c_n)$ が条件 1 を満たすとする．

$\mathcal{F}(\pi)$ を作成する際，前半 $c_1 < c_2 \dots < c_l$ と後半 $c_{l+1} > \dots > c_n$ に分けて考える．

前半では c_1 段目から c_2 段目，c_2 段目から c_3 段目，$\dots$ の領域に 1 本ずつエッジを順次描いており，それぞれが交差することはない．同様に後半で描いたエッジ同士も交差しない．

以下では後半で描いたエッジが前半で描いたエッジが交差しないことを示す．

任意の j $(l+1 \le j \le n)$ に対して $\sigma_1(c_j)$ から $\sigma_2(c_j)$ にエッジをひくとする．$t = \sigma_1(c_j), s = \sigma_2(c_j)$ とおくと，$s, t \in Points$ であり，エッジ st は後半でひく線なので t は s の上段になる．このときこのエッジは前半でひかれたどのエッジとも交差しないことを証明する．

(1) $c_j - c_{j+1} = 1$ のとき

$s \prec t$ であり隣接点を結ぶので他のエッジとは交差しない (図 5(1))．

(2) $c_j - c_{j+1} = 3$ のとき

s, t は同一側にある．また，$n = c_j - 1$ とすると，$\sigma_1(n)\sigma_2(n)$

はすでに前半でエッジとしてひかれている．$s' = \sigma_1(n), t' = \sigma_2(n)$ とおくと，$s' \prec t'$．$t \prec s' \prec t' \prec s$ または $t \prec compl(s') \prec compl(t') \prec s$ が成立する．したがって st は他のエッジとは交差しない（図 5(2)）．

(3) $c_j - c_{j+1} = 2$ のとき

s, t は反対側にある．また，$n = c_j - 1$ とすると，$\sigma_1(n)\sigma_2(n)$ はすでに前半でエッジとしてひかれている．$s' = \sigma_1(n), t' = \sigma_2(n)$ とおく．

(3.1) $t' \prec s$ かつ s' が t よりも上段のとき．

$s't'$ は前半でひかれたエッジなので s' は t' より上段にある．したがって st と $s't'$ は交差しない（図 5(3.1)）．

(3.2) $t' \prec s$ かつ s' が s よりも下段のとき．

(3.2.1) s', t' が反対側ならば s, t' は同一側になり，両者の間には 未訪問点が偶数個存在する．それを $s_1 \prec \ldots \prec s_{2k}$ とする．後半は未訪問点があれば必ず順番に訪問するため，$compl(s)$ には $compl(s_1)$ からエッジがひかれており，その前にはその相対点である s_1 には s_2 からエッジがひかれている．これを繰り返すと $compl(s_{2k})$ には t' からエッジがひかれることになり，t' は $compl(s_{2k})$ と s' の異なる 2 点と接続されることになって矛盾．したがって，このような場合はない（図 5(3.2.1)）．

(3.2.2) s', t' が同一側ならば s, t' は同一側になり，両者の間には 未訪問点が奇数個存在する．それを $s_1 \prec \ldots \prec s_{2k-1}$ とする．後半は未訪問点があれば必ず順番に訪問するため，$compl(s)$ には $compl(s_1)$ からエッジがひかれており，その前にはその相対点である s_1 には s_2 からエッジがひかれている．これを繰り返すと s_{2k} には t' からエッジがひかれることになり，t' は s_{2k-1} と s' の異なる 2 点と接続されることになって矛盾．したがって，このような場合はない（図 5(3.2.2)）．

(3.3) $s' \prec t$ かつ t' が s よりも下段のとき．

$s't'$ は前半でひかれたエッジなので s' は t' より上段にある．したがって st と $s't'$ は交差しない（図 5(3.3)）．

(3.4) $s' \prec t$ かつ t' が t よりも上段のとき．

(3.4.1) s', t' が反対側ならば $compl(t), t'$ は同一側になり，両者の間には 未訪問点が偶数個存在する．それを $s_{2k} \prec \ldots \prec s_1$ とする．後半は未訪問点があれば必ず順番に訪問するため，$comp(t)$ からは次に s_1 にエッジがひかれることになり，その後にはその相対点 $comp(s_1)$ には $comp(s_2)$ にエッジがひかれる．これを繰り返すと $compl(s_{2k})$ から t にエッジがひかれることになり，t は $compl(s_{2k})$ と s' の異なる 2 点と接続されることになって矛盾．したがって，このような場合はない（図 5(3.4.1)）．

(3.4.2) s', t' が同一側ならば t, t' は同一側になり，両者の間には 未訪問点が奇数個存在する．それを $s_{2k-1} \prec \ldots \prec s_1$ とする．後半は未訪問点があれば必ず順番に訪問するため，$comp(t)$ からは次に $comp(s_1)$ にエッジがひかれることになり，その後にはその相対点 s_1 には s_2 にエッジがひかれる．これを繰り返すと s_{2k-1} から t にエッジがひかれることになり，t は s_{2k-1} と s' の異なる 2 点と接続されることになって矛盾．したがって，このような場合はない（図 5(3.4.2)）．

以上により，$c_j - c_{j+1} = 3$ のとき，st と $s't'$ は交差しない．

(4) $c_j - c_{j+1} > 3$ のとき

(1)-(3) と同様の議論によって st は前半にひかれたどのエッジとも交差しないといえる．

□

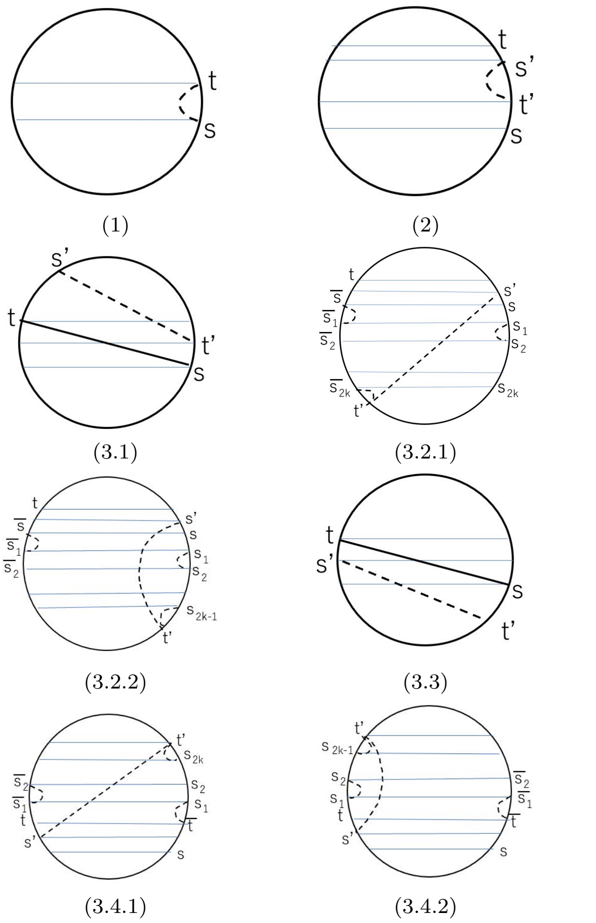


図 5　補題 1 の説明図（図では $compl(p)$ を $\overline{p}$ と表示している）．

5.　円の外部で交差のないことの証明

5.1　円の外部での接続

π にしたがって円の内部で交差なく n 本の線をつなげられれば，その各ペアに相当する点を円の外部でつなぐことで 1 つの閉曲線をつくることができる．

［定義 5］　(極長エッジ) 円周上の 2 点を結ぶ 2 つのエッジを $(a, b), (c, d)$ とするとき，円周上を時計回りに辿ったときに a, c, d, b の順に点が出現するとき，(a, b) は (c, d) を**覆う**という．エッジ (a, b) を**覆う**エッジが存在しないとき，(a, b) を**極長エッジ**とよぶ．

円周上の点を $\{p_1, \ldots, p_{2n}\}$ とし，円の内部でこれらが交差なく結ばれた $\mathcal{F}(\pi)$ が与えられたとする．

以下の手順によってこれらの $\mathcal{F}(\pi)$ におけるペアを円の外部で曲線で結ぶ (図 6)．

($u = 1$ のとき)

$S = \{p_1, \ldots, p_{2n}\}$, R を円の外部領域とする．

S の 2 つの要素を結ぶもので極長エッジの 1 つを P_1Q_1 とおく．R において P_1, Q_1 を結ぶ曲線 cv_1 を描く．

($u>1$ のとき)

S を円周上の点の中でエッジ P_u, Q_u および cv_u で囲まれた領域内に存在する P_u, Q_u 以外の点の集合とする．また，R をエッジ P_u, Q_u および cv_u で囲まれた領域の中で円の外部とする．

S の 2 つの要素を結ぶもので極長エッジの１つを $P_{u+1}Q_{u+1}$ とおく．R において P_{u+1}, Q_{u+1} を結ぶ曲線 cv_{u+1} を描く．

複数の極長エッジが存在する場合はそれぞれについてこの手続を行なう．

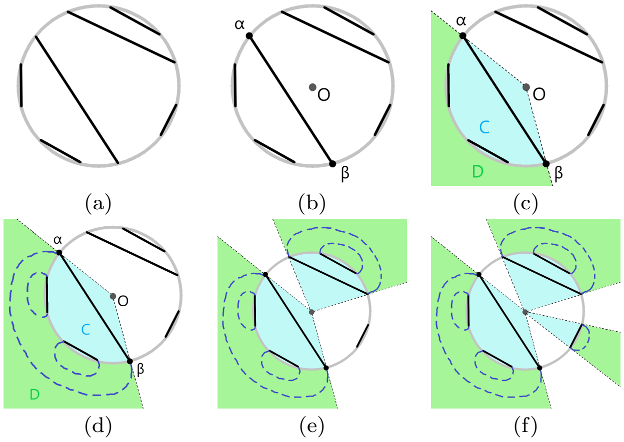


図 6　補題 2 の説明図.

［補題 2］　円周上の $2n$ 個の点のペアをとり円の内部で互いに交差せずにつなぐエッジが描けるならばそのペアを円の外部で互いに交差せずにつなぐエッジを描くことができる．

証明の概略) 円の内部で互いに交差しないエッジをかいたとき，円周上の点 A_1 と B_1，A_2 と B_2 がそれぞれ線分で結ばれていたとする．cv_1, cv_2 をそれぞれ A_1 と B_1，A_2 と B_2 を円の外部で接続する曲線の線分だとする．

この 4 点の円周上における相対的な位置は，円周を辿ったときに出現する順番によって (A_1, B_1, A_2, B_2), (A_1, B_1, B_2, A_2), (A_1, A_2, B_2, B_1) の 3 通り考えられる．

最初の 2 つの場合には，隣接点同士をつないでいるので cv_1, cv_2 は交差しない．最後の１つの場合には，カバーケースなので cv_2 を cv_1 よりも円に近い領域に描くことで両者を交差することなく描ける．

これを繰り返すことですべてのペアの点を結ぶ曲線を円の外側でひくことが可能になる．

定理 *1* の証明)

補題 1 と補題 2 より並び替え π が条件１を満たす場合には π で示される順番で $2n$ 個の点を結ぶことで１つの単純閉曲線を得ることがえｄきる．

証明の詳細は [8] を参照．

6. 考　　察

この条件は十分条件にはならない．たとえば，π $=$

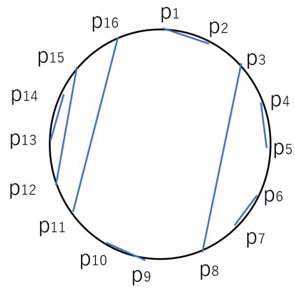


図 7　$\pi = (1, 2, 5, 4, 3, 8, 7, 6)$ に対応するエッジの図.

$(1, 5, 2, 3, 4)$ は条件１は満たさないが，交差なしの単純閉曲線を描くことができる．

ではこの条件をどこまで緩和できるだろうか．以下に１つの可能性を示す．

［定義 6］　(並び替えの連接) $\pi_1 = (c_1, \ldots, c_n)$, $\pi_2 = (d_1, \ldots, d_m)$ をそれぞれ $\{1, 2, \ldots, n\}$,　$\{1.2, \ldots, m\}$ の並べ替えとする．$\pi = \pi_1 \circ \pi_2 = (c_1, \ldots, c_n, n+d_1, \ldots, n+d_m)$, ただし $d_{n+m} = c_1$ とするとき，π を π_1 **と** π_2 **の連接**とよぶ．

[条件 2] $\pi = (c_1, \ldots, c_n)$ に対して $\forall i (1 \le i \le n-1)$; $c_{i+1} - c_i$ が奇数．

［命題 2］　$\pi_1 = (c_1, \ldots, c_n)$, $\pi_2 = (d_1, \ldots, d_m)$ をそれぞれ $\{1.2, \ldots, n\}$,　$\{1.2, \ldots, m\}$ の並べ替えでともに条件１，２を満たすとする．連接 $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 = (g_1, \ldots, g_{n+m})$ とおく．e_i を Q_{g_i} から o $P_{g_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots n+m)$ へのエッジとする．$g_1 - g_{n+1}$ が奇数ならば $(g_1 - g_n)(g_{n+1} - g_{n+m}) > 0$; 偶数ならば $(g_1 - g_n)(g_{n+1} - g_{n+m}) < 0$. したがって $e_{g_1}, \ldots, e_{g_{n+m}}$ は交差しない．

［例 2］　$\pi_1 = (1, 2, 5, 4, 3)$, $\pi_2 = (8, 7, 6)$ とする．これらはいずれも条件１，２を満たす．このとき $\pi = \pi_1 \circ \pi 2 = (1, 2, 5, 4, 3, 8, 7, 6)$ に対応するつなぎ方によってすべての頂点を通る単純閉曲線が描ける (図 2).

定理 1 は並び替えの任意の有限個数の連接に拡張可能である．

［命題 3］　$\pi_k = (c_1, \ldots, c_{m_k})$ $(k = 1, \ldots, N)$ が条件１を満たすとする．

$\pi = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_N = (g_1, \ldots, g_{m_1+m_2+\ldots+m_N})$. とおく．

そして，$M1 = m_0 + \ldots + m_k + 1$, $M2 = m_0 + \ldots + m_{k+1}$, $M3 = m_0 + \ldots + m_{k+1} + 1$, $M = m_0 + \ldots + m_{k+2}$ $(k = 0, \ldots, m_1 + \ldots + m_N, g_{m_0} = 0)$ とおく．

$g_{M1} - g_{M2}$ が奇数ならば $(g_{M1} - g_{M2})(g_{M3} - g_{M4}) > 0$; 偶数ならば $(g_{M1} - g_{M2})(g_{M3} - g_{M4}) > 0$.

このとき π の順番によって点を接続するエッジを描くととこれらは互いに交差しない．

7. お わ り に

内部で１つの接点を共有する複数の有限曲線セグメントを 2 次元平面上で連結して交差のない単純閉曲線を描くことができるような必要条件を示し，十分性と拡張について考察した．必

要十分条件として成り立つ n の上限についての考察と一般の n についての条件のさらなる緩和の検討が今後の課題である．

謝辞　本研究は科研費 JP18K11453 の助成を受けたものである．

文　献

[1] Chen, J., Cohn, A., Liu, D., Wang, S., Ouyang, J., and Yu, Q. A survey of qualitative spatial representations, *The Knowledge Engineering Review*, 30(1):106136, 2013.

[2] Cohn, A. G. and Renz, J. Qualitative spatial reasoning handbook of knowledge representation, F. Harmelen, V. Lifschitz and B. Porter(eds.), Chapt 13, pp.551-596, Elsevier, 2007.

[3] Galton,A. and Meathrel,R. Qualitative outline theory. *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1061–1066, 1999.

[4] Leyton, M. A process-grammar for shape. *Artificial Intelligence*, 34:213–247, 1988.

[5] Leyton, M. Inferring causal-history from shape. *Cognitive Science*, 13:357–387, 1989.

[6] Pich, A. and Falomir, Z. Logical composition of qualitative shapes applied to solve spatial reasoning tests. *Cognitive Systems Research*, 52:82–102, 2018.

[7] Tosue, M. and Takahash, K. Towards a Qualitative Reasoning on Shape Change and Object Division, *14th International Conference on Spatial Information Theory*, pp.7:1-7:15, LIPICS Vol. 142, 2019.

[8] Tosue, M. On a qualitative representation and reasoning on the shape chane and its property (In Japanese). *Master's thesis*, School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University, 2020.