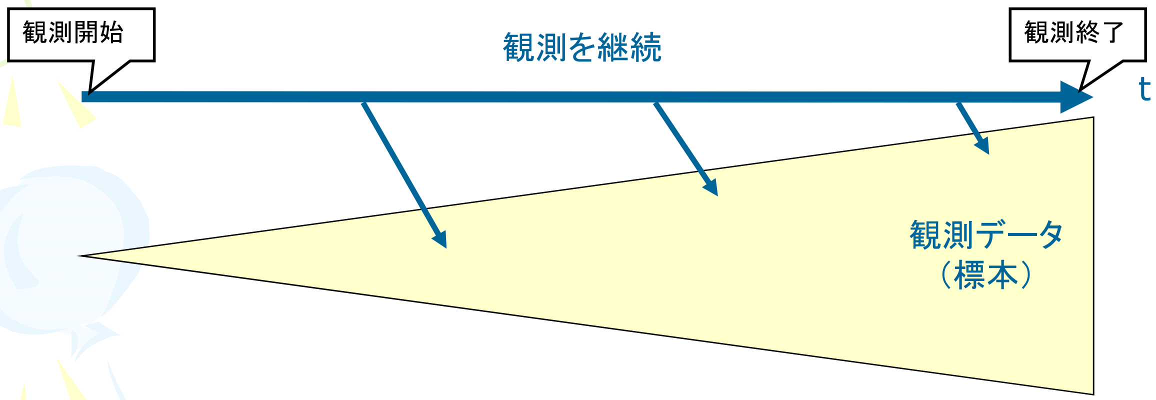
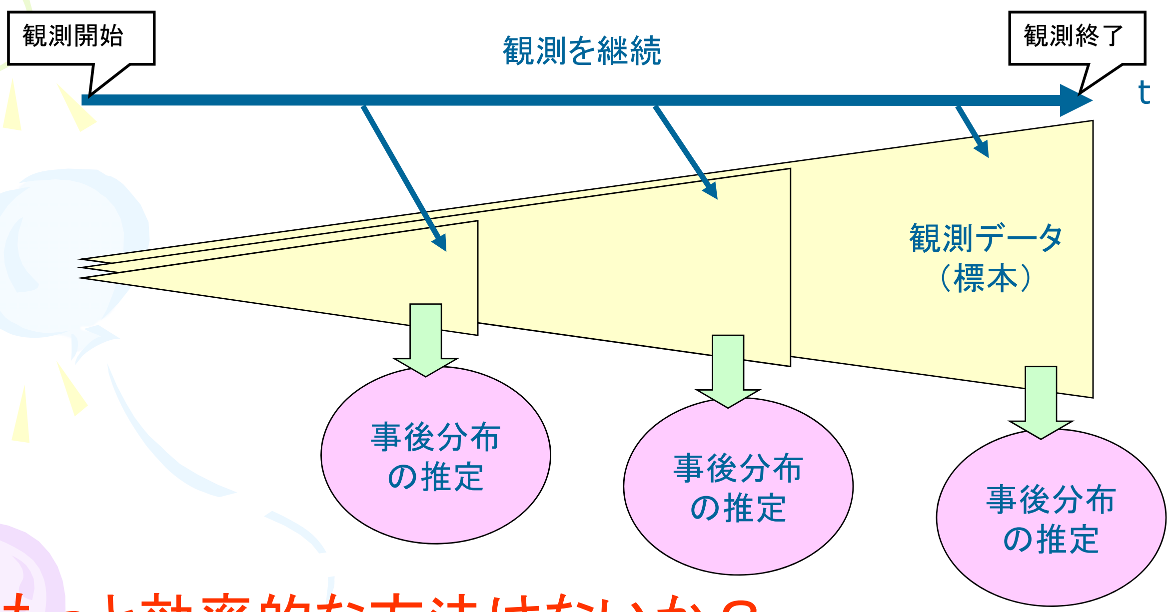
観測データは漸増する



観測データは漸増する (2)



もっと効率的な方法はないか？

漸近的な確率分布推定

- ベイズの定理と
  先験確率分布

あるのでは？

分布に対する知識がなければ一様分布を仮定

事前分布

観測データから条件つき確率を計算

事後分布

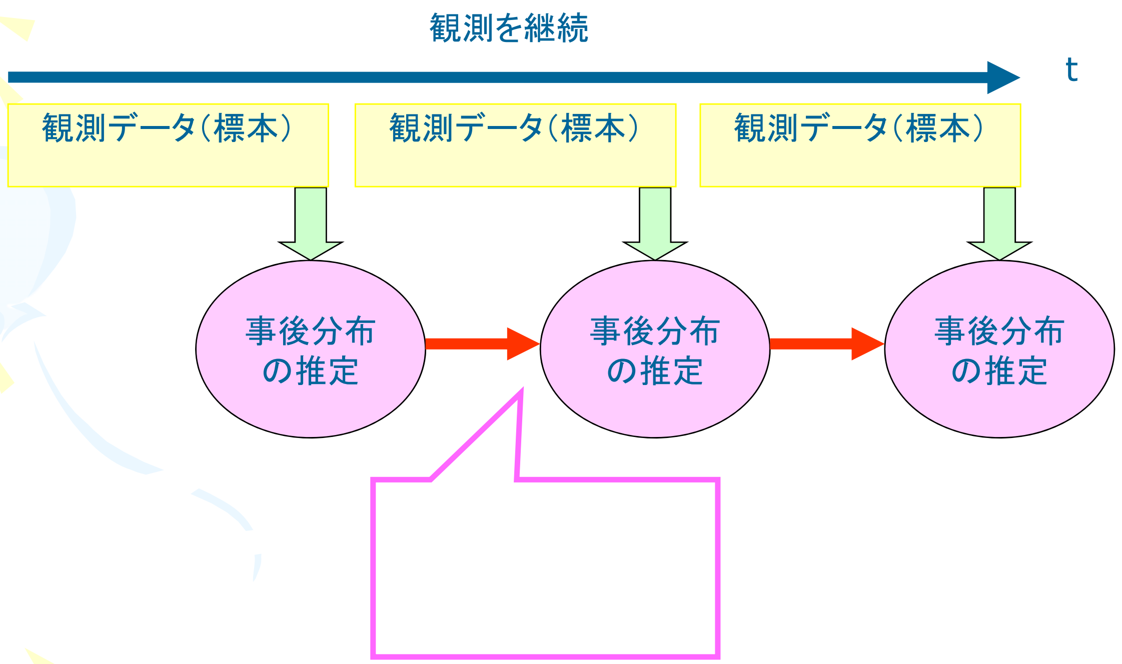
$$p(B(p)\,|\,A) = \frac{p(B(p))P(A\,|\,B(p))}{\int_0^1 p(B(q))P(A\,|\,B(q))dq}$$

漸近的な確率分布推定 (2)

- ベイズの定理を漸化的に適用

$$p(B(p)\,|\,A_n) = \frac{p(B(p)\,|\,A_{n-1})P(A_n\,|\,B(p))}{\int_0^1 p(B(q\,|\,A_{n-1}))P(A_n\,|\,B(q))dq}$$

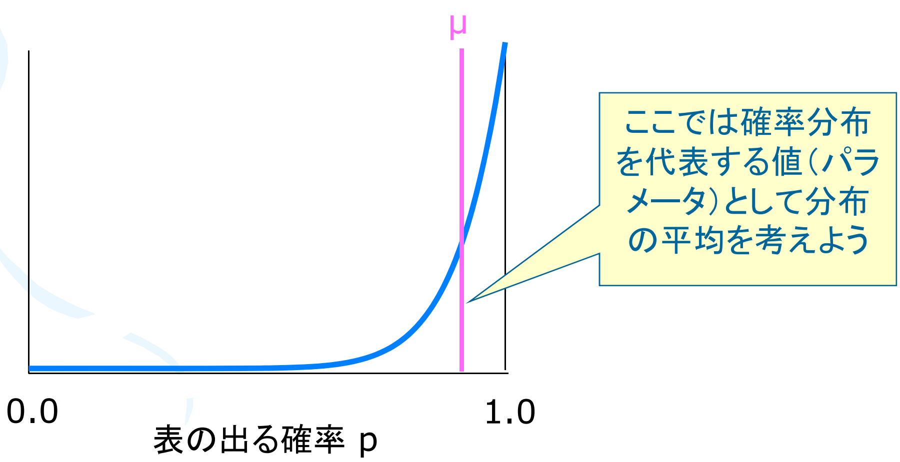
漸近的な確率分布推定 (3)



漸近的なパラメータ推定

- あるコインを n 回投げたら k 回表が出た。

$$f(p) = C \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$



平均

- 確率変数 X の「平均」(mean)

「連続型確率分布の場合」

確率変数の値

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

expected value
（後述）の「E」

確率密度関数

補題

- 確率分布

$$f(p) = C \cdot p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \quad \left(C = 1 \Big/ \int_0^1 q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1} dq \right)$$

- 平均

$$E(P) = C \cdot \int_0^1 p \cdot f(p)\, dp$$

$$= \int_0^1 p^{\alpha}(1-p)^{\beta-1}\, dp \Big/ \int_0^1 q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}\, dq$$

$$= ?$$

補題’

$$\int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}\,dp = \frac{1}{\beta}\left(\left[p^\alpha (1-p)^\beta\right]_0^1 + \alpha\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^\beta dp\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^\beta dp$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}(1-p)dp\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp - \int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}dp\right)$$

補題’’

$$\int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}\,dp = \frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp - \int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}dp\right)$$

$$\frac{\int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}\,dp}{\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp}{\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp} - \frac{\int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}\,dp}{\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp}\right)$$

$$\frac{\int_0^1 p^\alpha (1-p)^{\beta-1}dp}{\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

各自、
導出して
みること

補題

- 確率分布

$$f(p) = C \cdot p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \quad \left(C = 1 \Big/ \int_0^1 q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1} dq \right)$$

- 平均

$$E(P) = C \cdot \int_0^1 p \cdot f(p)\, dp$$
$$= \int_0^1 p^{\alpha}(1-p)^{\beta-1}\, dp \Big/ \int_0^1 q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}\, dq$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

漸近的なパラメータ推定 (2)

- 確率分布 (n 回投げたら k 回表)

$$f(p) = C \cdot p^{k}(1-p)^{n-k} \quad \left(= C \cdot p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \right)$$

- 平均

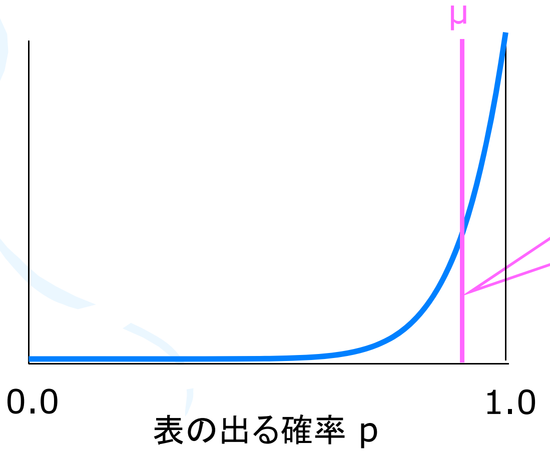
$$E(P) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} =$$
$$=$$

各自、
導出して
みること

漸近的なパラメータ推定 (3)

- あるコインを n 回投げたら k 回表が出た。

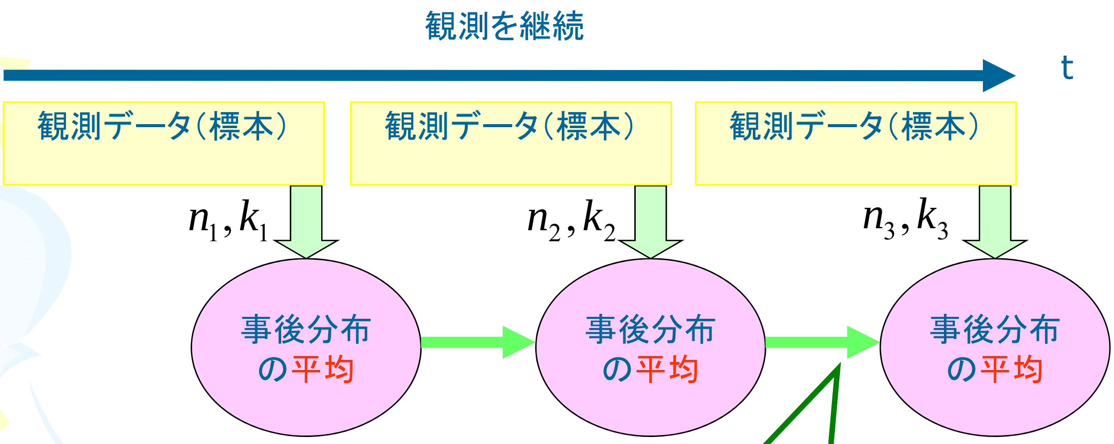
$$f(p) = C \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$



確率分布の平均

$$\mu = \frac{k+1}{n+2}$$

漸近的なパラメータ推定 (4)



$$\mu = \frac{1 + \sum_i^3 k_i}{2 + \sum_i^3 n_i}$$

n と k を別々に記憶することで漸近的なパラメータ(平均)推定が行える